昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2011年11月1日発行　第49巻11号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

11
2011

特集

線形から非線形へ

数学と物理の世界を拡げるキーワード



No.581

サイエンス社

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ-85：for Senior & Graduate Courses）

実例で学ぶ
精度保証付き数値計算
理論と実装

中尾充宏・渡部善隆　共著

本体 2362 円　送料 290 円　表示価格は税抜きです

与えられた問題の特性に応じて工夫を要する非線形微分方程式の解の数値的存在検証について，その原理とアルゴリズムをなるべく一般的な形で整理・分類して提示した．合わせて具体的な問題に対する検証のプログラムを示したことで，「精度保証付き数値計算のプログラミングは職人芸ではない」ことを納得させてくれる得難い一冊となっている．

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 581 November 2011

線形から非線形へ

数学と物理の世界を拡げるキーワード

数理科学（10月号）前号案内／84
数理科学（12月号）次号予告／84
数理科学バックナンバー一覧／72

表紙：戸川　隼人

科学技術計算・ビジュアリゼーションソフト最前線

November 2011 MATHEMATICAL SCIENCES Number 581

特集／線形から非線形へ

巻頭言

吉川 研一

本特集号では，非線形のキーワードの下，“何が未開拓の学問領域として残されている”のか，あるいは，“これら取り組むべき課題としてどのような問題があるのか”，といったことを考えてみたいと思います．

問題意識を明確にするためにまずは，振り子時計を取り上げて考えてみましょう（保存系）．振り子の運動方程式は，$d^2\theta/dt^2 = -\sin\theta$ です．振り子の振り幅が小さいときには，$\sin\theta \to \theta$ と線形化することができ，そのことから等時性がでてきます．振り子の振幅が大きくなると，$\sin\theta \to \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \cdots$ から予想されるように，等時性は崩れ，周期が次第に増大します．これは弱い非線形効果といえます．さらに振幅が大きくしていく，すなわち振り子のエネルギーを増大させていくと，θ は 180° を越えて変化するようになります．このとき，往復運動をしていた振り子は，体操競技の大車輪のような回転運動に状態が飛び移ります（分岐現象）．回転運動には，エネルギーが等しい，右回りと左回りの2種類の状態が現れます（双安定）．このように，弱い非線形性からさらに進んだときに，質的な変化を生み出すような非線形現象，これが本号の主題であります．

次に，生物の有性生殖を考えてみましょう．個体の数を n とすると，雄と雌の恋が成立して子供のできる確率は一般に，n^2 で表され，死亡の確率は n に比例することから，次の非線形の微分方程式が出てきます．(a, b は正の定数)

$$\frac{dn}{dt} = an^2 - bn.$$

これは，$n = b/a$ に不安定固定点を持ちます．すなわち，個体数がある閾値を下回ると，その生物種は絶滅に向かわざるを得なくなることを意味しています．このように，生物種の数の変動の基本原理を数理的に理解しておくことは，地球環境の下での生物多様性を維持する方策を考える上では，必須といってもいいでしょう．さらに，上記の非線形常微分方程式の n を中性子に置き換えると，原子炉での臨界現象のメカニズムにつながることになります．

ここで最近見つかった面白い非線形現象を紹介しましょう．油（絶縁体）の中に，ミクロ水滴を作り，直流の電圧を印加してみます（図1）．すると，ある電圧以上になると，滑らかな回転運動が生じます．ここでは，一定の電圧の下，実空間上にlimit cycleが生じていることに注目してください．図のような実験系では，電極間の距離が $100\,\mu$m 程度，電圧は数十Vに設定したときにこのような定常的な運動が起こります．意外なことに，昨年に発見されるまでは，このような直流電場での回転運動といった現象は知られていませんでした．大学の物理学では，古典力学は空間スケールが小

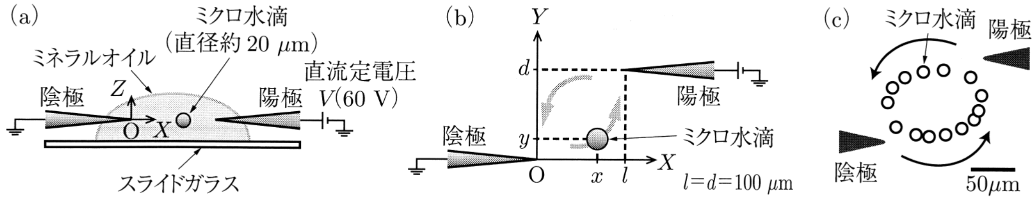


図 1　直流電圧の下でのミクロ水滴の回転運動．(a), (b) 実験装置の側面および俯瞰図（60 V, $l, d = 100\,\mu$m)，(c) 油相中の液滴の運動，0.4 秒ごとの映像の重ね合わせ．Takinoue, *et al.*, *Appl. Phys. Lett.*, **96**, 104105, 2010.

さくなると，量子力学に移行すると教えられます．しかしながら，図に示した実験例でも明らかなように，古典力学の範囲でも，数十 μm 程度に小さくするだけで，マクロな世界で見ることのできない現象が起こります．このスケールは，地球上に存在する生命体の基本単位である細胞のサイズに相当し，ブラウン運動が顕在化する空間です．そこでは，粘性項が慣性項に勝る世界となり，物体が自発運動をするときには，必然的にエネルギーの供給・散逸を伴うことが必要となります．このことは，“非線形” ダイナミクスが，生命現象の基本に横たわっていることを示唆しています．

非線形をキーワードとした科学には，壮大な未開拓領域が広がっています．本特集では，非線形科学の学問の流れを振り返り，将来を展望するといった狙いから，蔵本さんには対談をお願いいたしました．

太田さんには，エネルギーを消費しながら自ら運動する物体をとりあげ，多様な運動モードが生じるしくみを，数理科学の観点で論じていただきました．

柴山さんは，古典力学を対象に，バネや振り子から解き明かし，多体問題へと展開しています．2000 年になって，3 体問題で “8 の字解” が発見されるなど，わずか 3 つの物体の運動についてもまだまだ分からないことが残されています．

高塚さんと高橋さんには，“線形” のシュレーディンガー方程式から非線形ダイナミックスが生じる道筋を，例をあげながら解説をしていただきました．高塚さんたちの目指す，「量子論であるからこそ現れる非線形現象」を探究する研究にはロマンを感じることでしょう．

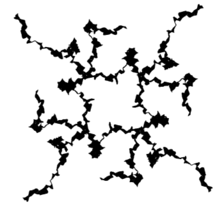
平岡さんは，通信するときに雑音が引き起こす誤りを如何に効率良く，そして高い信頼性で訂正するようなシステムはどのようにすると作れるのかといった問題を解説しています．信号の訂正（復号）の問題を，有理写像の不動点や安定性でもって記述し，今後の課題は，復号に現れる非線形性を如何にして，符号化の線形関係式で特徴づけるのか，ということであると明快に論じています．

山田さんは，乱流を取り上げています．一様等方的な乱流については，スケーリングなどにより一応理解が得られる段階まで研究が進展してはいますが，空間的な一様性が崩れた場合には，不明なことばかりであると言っても良いと思われます．木星などに見られる，自転運動が引き起こす大気の層状の流れを題材に，非一様非等方乱流を論じています．

Marcel Hörning さんと高木さんは，心筋の不整の新しい治療法を取り上げていただきました．近年，街中や大学のキャンパスで，AED と称する救命具が数多く見受けられるようになりました．AED では，数千 V 程度の電気的ショックを与えて，一か八かの，心臓治療をするわけですが，彼らは，数 V 程度の電位（乾電池程度の電位）で，心筋不整を直すことのできる可能性を論じています．この治療法の勘所は，興奮場上の非線形ダイナミクスです．

（よしかわ・けんいち，京都大学大学院理学研究科）

散逸系の非線形ダイナミクス



太田 隆夫

1. はじめに

物体の運動を理解することはアリストテレスの昔から人類の基本的関心の一つであった．ガリレオやニュートンによってその基本方程式である，質量 × 加速度 = 力，が確立した．重力についてはアインシュタインによって一般相対性理論が構築された．今日の GPS（Global positioning system）には一般相対論的効果が位置の補正に取り入れられていることはよく知られている．また，昨年，話題になった惑星探査機「はやぶさ」のように，（様々な困難はあったにせよ）小惑星に着陸して地球に帰還することができるまで，惑星探査機の運動は精密に予測し制御できるようになっている．

「はやぶさ」では自身のエンジンと太陽，地球などの惑星からの重力を使って加速，減速を行う．内部でエネルギーを生成・消費する動体の代表例は生物である．アクチン繊維の上を動くミオシン分子，ゾウリムシ，アメーバ，様々な細菌，そして，日常的スケールでは，昆虫，鳥，魚など自己推進，あるいは，自走する実に様々な生命体がある[1]．ただし，「はやぶさ」では宇宙空間のガスとの摩擦は十分小さいのに対し，特に，ミクロンスケール以下のサイズの生物は非常に摩擦の大きい環境で動いていることが大きな違いである．また，生体の中では，木の葉のように，流れに身を任せて動き生命維持に重要な役割を果たしている赤血球のようなものもあることにも注意しよう．

自身の内部でエネルギーを生み出し，それを消費することによって推進するとき，それが単純に，質量 × 加速度 = 力に従わないのは明らかである．特に，生体では一般に化学エネルギーを運動エネルギーに変換している．さらに，多くの分子，組織，器官が関与して，かつ，摩擦による**エネルギー散逸**が大きい環境で複雑な運動を実現している．これらの運動法則やそのメカニズムを解明する研究は，未だ，発展途上である．

本稿では，生命体の運動も視野に入れて，やわらかな**自己推進粒子**の運動方程式をできるだけ簡単な，かつ，一般的議論で導出してそのダイナミクスを調べてみよう．

2. 自走運動

無生物でも化学エネルギーを運動エネルギーに変換して自走する例はたくさんある．年配の方なら「樟脳船」というオモチャをご存じであろう[2]．紙，あるいは，プラスティックで 3–5 cm くらいの舟形を作り，その船尾に樟脳片をつけて水に浮かべると前進する．船尾で樟脳が溶けて水・空気界面を覆うため界面張力が下がり，船の前方の大きな界面張力との間がアンバランスになり，船を前に引っ張る力が優勢になるためである．これの数理モデルも作られている[2]．（家庭で本質的に同じ現象を観察するには，綿棒の一端に洗剤を垂らし，水面に平行に静かに置くと，洗剤のついてないほ

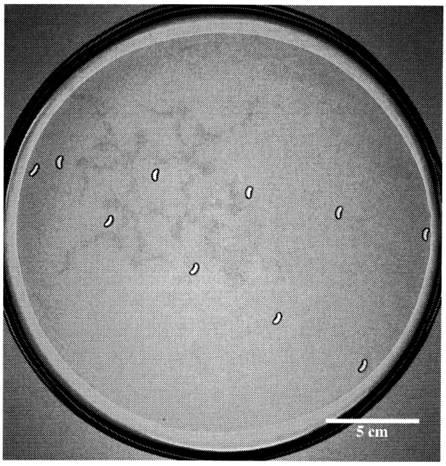


図 1　自己推進するペンタノール油滴[3]．油滴 1 個の体積は 10 $\mu\ell$．2.25 vol％ のペンタノール溶液．右から左に動き，壁で反射して右下に動いている．1 秒ごとのスナップショット．白いバーの長さは 5 cm．永井健氏のご厚意による．

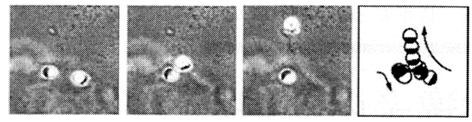


図 2　2 つの無水オレイン酸液滴の運動．一番右の図のように，2 つの液滴が近づいて離れていく様子の時間経過（左から右の図へ）である．速度は 100 μm/s 程度である．文献 4）より許可を得て転載．

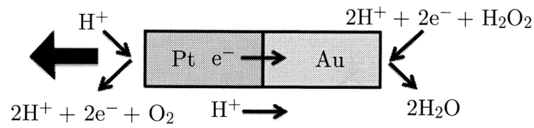


図 3　白金と金からなるナノメートルスケールの棒．白金側の化学反応で生成された電子は金側に流れ，外側の流体中は水素イオンが右に流れる．その結果，棒は左に動く．

うを前にして進む.）自走する実験系として，図 1 ではペンタノール溶液中にペンタノールの油滴を垂らすとそれが勝手にある方向に進んでいく例を示してある[3]．シャーレを上から観察したとき，油滴は右から左に進んでいき，左端でシャーレに衝突して向きを変え，右下に進んで行っている．動かない油滴は表面張力のため球形であるが，並進運動している油滴はバナナ型に変形していることに注意しよう．油滴の周りでのペンタノール濃度の不均一が表面張力の不均一を生み，そのため油滴が動き，それがさらに濃度の不均一を起こすというようなメカニズムであると想像できるが，このことを定式化した動的理論はないようである．

上の例では自己推進する油滴はセンチメートルのオーダーであるが，もっと，ミクロなスケールでの自己推進粒子もある．図 2 は水中に形成させた直径約 100 μm の油滴に，油滴の原材料となる分子を添加する．油滴には触媒を含ませてあるので，その表面で原材料分子が油滴構成分子へと変化する化学反応が進み，その化学エネルギーが運動に使われている．この例では液滴の変形は顕著ではないが，表面での化学反応が特定の箇所で活発化し，油滴内部に対流が生じるため，反応生成物は反応起点の反対側で廃棄される．この対流が推進の方向を決めている．以上の 2 例では，もともと等方的であった液滴が自発的にその対称性を破って自走運動を起こしている．

それに対して，最初から前後の区別のある自己推進粒子の例を図 3 に挙げる．白金と金を繋いだナノスケールの棒を H_2O_2 溶液につけると白金側で $H_2O_2 \rightarrow 2H^+ + 2e^- + O_2$ の化学反応が起こり，生じた電子は棒内を伝わって金側に移動することが知られている[5]．電荷のバランスを保つため，溶液側では水素イオンが右に移動し，それが溶液の流れを起こす．溶液と棒全体では力が作用していないから，この結果，棒は左に動く．すなわち，解釈の一つとして化学反応で生じたイオンの濃度勾配が推進力の起原であると言われている．この現象は自己電気泳動効果と呼ばれることがある．同様な運動は，粒子スケールの温度勾配によっても起こすことができる．コロイド粒子表面の半分を熱を吸収しやすい物質で被覆し，残りの半分は熱を吸収しないように加工しておく．そのコロイド粒子にレーザー光をあてると熱を吸収する側が高温，吸収しない側が低温にとなり，この温度差を利用して粒子は並進運動をする[6]．

3. エネルギーの注入と散逸

摩擦抵抗を受けながら運動している粒子の運動方程式は x を位置座標，v を速度として

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v, \\ \dot{v} + \mu(v)v &= 0\end{aligned} \tag{1}$$

で与えられる．簡単のため，質量とは1としている．ドットは時間微分を表す．$\mu(v)$ は速度 v に依存する摩擦係数である．速度が小さいとき，摩擦力は速度に比例し

$$\mu = \mu_0 \tag{2}$$

と置くことができる．比例定数 μ_0 は，ここでは正である．方程式 (1), (2) の時間無限大の解は明らかに $v = 0$，すなわち，最初もっていた運動エネルギーはなくなり，粒子は静止する．このように着目している系がもっていたエネルギーが周りに不可逆的に流れ出すことをエネルギーの散逸という．

逆に，系にエネルギーを注入するにはどうすればいいであろうか．一番単純には，そのメカニズムは問わないとして，係数 μ_0 を負にすればよいであろう．しかし，そのままでは速度が限りなく大きくなってしまう．発散を押さえるためには速度が大きくなると摩擦効果が強くなるようにする必要がある．その一つは

$$\mu = \mu_0 + gv^2 \tag{3}$$

である．係数 g は正である．摩擦力は速度の方向と逆向きに作用するから $\mu(v)$ は v の偶関数でなければならない．

4. 自己推進粒子

方程式 (1) を任意の次元の粒子の運動に書き換えよう．今後は速度をベクトル $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ で表し運動方程式を

$$\dot{v}_i = \gamma v_i - g\vec{v}^2 v_i \tag{4}$$

のように導入する．便宜上，$\gamma = -\mu_0$ と定義し直した．もし，$\gamma = g = 0$ であれば方程式 (4) は自由粒子の運動方程式である．摩擦力がある場合，$\gamma < 0, g > 0$ であれば安定解は $\vec{v} = 0$ である．エネルギー注入があり大きな速度で摩擦力が強くなる $\gamma > 0$ では安定解は $|\vec{v}| = (\gamma/g)^{1/2} \neq 0$ となる．このことから，パラメータ γ の値を変えていくと，方程式 (4) の安定解は $\gamma < 0$ の粒子が動かない状態から $\gamma > 0$ の一定の速度で動く状態へ変化することがわかる．このように，パラメータを変化させることによって安定解の振舞いがある値を境に質的に変化することを**解の分岐**という．以下では，上の分岐を**ドリフト分岐**と呼ぶ．本稿では比較的簡単な非線形常微分方程式系が様々な分岐を起こすことを紹介する．

水溶液中の油滴の実験，図1では油滴の形は速度に応じて変化する．詳しく説明するスペースの余裕はないが，興奮性のある反応拡散系の数値シミュレーションでも興奮ドメインの形は速度に依存することが知られている[7]．さらに，細胞の運動においても形と速度のカップリングがある[8]．

このような変形する自己推進粒子の運動を考察しよう．簡単のため，空間2次元の中に置かれた円形の粒子の変形を考える．図4のように，中心からの縁までの距離を $R(\theta, t)$ と表し，それをフーリエ級数展開する．

$$R(\theta) = R_0 + \delta R(\theta, t)\,, \tag{5}$$

$$\delta R(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n(t) e^{in\theta}\,. \tag{6}$$

R_0 は円の半径である．粒子の面積（3次元では体積）は一定であると仮定して $n = 0$ 成分はゼロとおく．また，$n = \pm 1$ 成分は重心の平行移動を表すが，それは重心速度 $\vec{v}$ で考慮されているので (6) の総和から省く．その結果，取り入れるべき最低

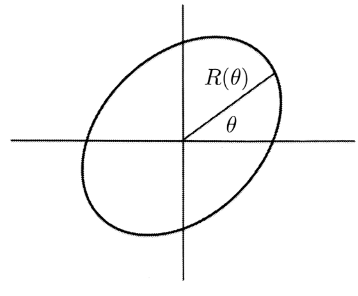


図4　変形した粒子の重心から表面までの距離．

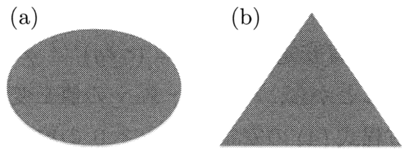


図 5 基本的な 2 つの変形．(a) は $n = \pm 2$ のフーリエモードによる変形．(b) は $n = \pm 3$ のフーリエモードによる変形．3 回回転対称性を強調するため正 3 角形にしてあるが，変形は一般になめらかである．

のフーリエ振幅は $z_{\pm 2}(t)$ である．これの発展方程式を書き下してもいいのではあるが，フーリエ振幅による表現は 2 次元空間に限られる欠点がある．任意の空間で変形粒子に対する有効な理論を作るため，次の 2 階対称テンソル S_{ij} を導入しよう．

$$\begin{aligned} S_{11} &= -S_{22} = z_2 + z_{-2}\,, \\ S_{12} &= S_{21} = i(z_2 - z_{-2}). \end{aligned} \tag{7}$$

$\mathrm{Tr}S = 0$ である．このテンソルは図 5 (a) に示してある楕円変形を表現する．$n = \pm 3$ のモードから 3 階対称テンソル U_{ijk} を以下のように構成しよう．

$$\begin{aligned} &U_{111} = z_3 + z_{-3}\,, \\ &U_{222} = -i(z_3 - z_{-3})\,, \\ &U_{111} = -U_{122} = -U_{212} = -U_{221}\,, \\ &U_{222} = -U_{112} = -U_{121} = -U_{211}\,. \end{aligned} \tag{8}$$

U_{ijk} は図 5 (b) の 3 角型変形を表す．

これらのテンソルは 3 次元空間では次のように拡張できる．まず，直交する 3 つの単位ベクトル $\vec{e}^m (m = 1, 2, 3)$ から

$$S_{ij} = \sum_{m=1}^{3} q_m e_i^m e_j^m \tag{9}$$

を定義する．定数 q_1, q_2, q_3 は $q_1 + q_2 + q_3 = 0$ を満たす．また，正四面体の重心から頂点に向かう 4 つの単位ベクトル $\vec{n}^m (m = 1, 2, 3, 4)$ によって U_{ijk} が

$$\begin{aligned} U_{ijk} = q \sum_{m=1}^{4} [&n_i^m n_j^m n_k^m \\ &- \frac{1}{5}(n_i^m \delta_{jk} + n_j^m \delta_{ki} + n_k^m \delta_{ij})] \end{aligned} \tag{10}$$

と定義される．q は定数である．液晶の理論では S_{ij} は棒状分子集団が向きを揃えた秩序状態を表現する変数として，また，U_{ijk} はバナナ型分子の配向秩序を表現する変数として知られている[9]．

5. 変形する自己推進粒子の運動方程式

ベクトル $\vec{v}$, 2 階対称テンソル S, および, 3 階対称テンソル U の時間発展方程式は，対称性の議論から現象論的に導出することができる．まず，ドリフト分岐をもつ方程式 (4) を仮定しよう．$\vec{v}$ と S からベクトルを作ることができるから，重心速度 $\vec{v}$ に対する最も簡単な方程式は

$$\frac{d}{dt} v_i = \gamma v_i - \vec{v}^2 v_i - a_1 S_{ij} v_j \tag{11}$$

となる．同じ添字については和をとる．係数 a_1 はこの議論だけでは決まらない定数である．S と U に対する方程式は $\vec{v}$ から対称テンソルを構成することを考え，また，ベクトルと 3 階テンソルから 2 階テンソルを作ることなどを考慮すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S_{ij} = &-\kappa_2 S_{ij} + b_1 \left(v_i v_j - \frac{1}{2}\vec{v}^2 \delta_{ij} \right) \\ &- b_2 U_{ijk} v_k - b_3 (S_{mn} S_{mn}) S_{ij}\,, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} U_{ijk} = &-\kappa_3 U_{ijk} + d_1 \Big[v_i v_j v_k \\ &- \frac{v_l v_l}{4} (\delta_{ij} v_k + \delta_{ik} v_j + \delta_{jk} v_i) \Big] \\ &+ \frac{d_2}{3} \Big[S_{ij} v_k + S_{ik} v_j + S_{jk} v_i \\ &- \frac{v_l}{2} (\delta_{ij} S_{kl} + \delta_{jk} S_{il} + \delta_{ki} S_{jl}) \Big]\,. \end{aligned} \tag{13}$$

となる[10,11]．ただし，3 次の非線形性まで取り入れるとしても，すべての項を書き下すと複雑になるので (12), (13) では多くの項を省略している．変形の時間スケールを決める係数 κ_2 と κ_3 は以下では正であり，その他の係数も b_1 以外はすべて正であると仮定する．

方程式 (11), (12), (13) は 2 次元空間での粒子を想定しているが，3 次元の場合でも同様な方程

式を書き下すことができる．また，非線形反応拡散方程式から孤立したドメインのドリフト分岐点近傍でこれらの方程式を実際に導出することができる[12]．そのとき，すべての係数は未知ではなく，反応拡散系のパラメータの関数として具体的に与えられる．

方程式 (11), (12), (13) の解の様子を調べよう．簡単のため，$b_2 = b_3 = 0$ とおく．そのとき方程式は $\vec{v}$ と S で閉じる．重心の速度を $v_1 = v\cos\phi$, $v_2 = v\sin\phi$，また，楕円型に変形した粒子の長軸の方向の単位ベクトルを $n_1 = \cos\psi$, $n_2 = \sin\psi$ とおくと方程式 (11) と (12) は

$$\frac{dv}{dt} = v(\gamma - v^2) - \frac{a_1 s v}{2}\cos 2\omega\,, \tag{14}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{a_1 s}{2}\sin 2\omega\,, \tag{15}$$

$$\frac{ds}{dt} = -\kappa_2 s + v^2 b_1 \cos 2\omega\,, \tag{16}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{v^2 b_1}{2s}\sin 2\omega \tag{17}$$

となる．$\omega = \psi - \phi$ であり，v と s は正の変数である．式 (15), (17) から

$$\frac{d}{dt}\omega = -\frac{1}{2}\left(-a_1 s + \frac{b_1 v^2}{s}\right)\sin 2\omega \tag{18}$$

を得る．空間の等方性から 2 つの角度 ψ と ϕ の差のみが変数となることに注意しよう．

上の方程式系の定常解を求めよう．一般性を失うことなく $\phi = 0$ と置く．パラメータ b_1 が正のとき

$$\begin{aligned} &\psi = 0, \\ &v^2 = v_0^2 = \frac{\gamma}{1+B}, \\ &s = s_0 = \frac{b_1 v_0^2}{\kappa_2} \end{aligned} \tag{19}$$

が解である．$B \equiv a_1 b_1/(2\kappa_2)$ とおいた．一方，b_1 が負のときは $\psi = \pi/2$, $v = v_0$, $s = -s_0$ が解となる．つまり，b_1 が正のときは粒子は進行方向に伸び，b_1 が負のときは進行方向と垂直な方向に伸びる．以下では $a_1 b_1 > 0$ とする．

この解の線形安定性を調べよう．定常解 v_0, s_0, $\psi = 0$，もしくは $\psi = \pi/2$ からのずれの一次の時

間変化を $e^{\lambda t}$ とおき，上の方程式に代入して，λ を求めると $\gamma > \gamma_c$ ではそれが正であり直進解は不安定となる．分岐点 γ_c は

$$\gamma_c \equiv \frac{\kappa_2^2}{a_1 b_1} + \frac{\kappa_2}{2} \tag{20}$$

で与えられる．このことは方程式 (18) から簡単に理解できる．この方程式の右辺の係数に定常解を代入し，γ の値を上げていくと $\gamma = \gamma_c$ で負から正に符号を変える．($\psi = \pi/2$ の場合も同様である．)

直線解が不安定化したところでは何が起こるのだろうか．解を $v = v_r$, $s = s_r$, $\psi = \omega t + \zeta/2$ $\phi = \omega t$ とおいて方程式 (14), (15), (16), (17) に代入すると

$$\begin{aligned} v_r^2 &= \gamma - \frac{\kappa_2}{2}, \\ s_r^2 &= \frac{b_1 v_r^2}{a_1}, \\ \cos\zeta &= \frac{\kappa_2}{a_1 s_r}, \\ \omega^2 &= \frac{a_1 b_1}{4}(v_r^2 - v_c^2) \end{aligned} \tag{21}$$

を得る．$v_c = \kappa/(a_1 b_1)^{1/2}$ である．この解は粒子の軌跡が円を描くように動く，すなわち，回転運動を起こすことを意味する．空間は左右対称であるから，時計回りの回転と反時計回りの回転のどちらも可能である．どちらが出現するかは初期条件で決まる．

条件 (20) は γ を固定して考えると κ_2 が小さくなると直線運動が不安定化することを意味する．実際，κ_2 が十分大きいときは方程式 (12) ($b_2 = b_3 = 0$) による S の変化は $\vec{v}$ に直ちに追随するから $dS_{ij}/dt = 0$ とおくことができ，その結果，S を v_i で表し，それを方程式 (11) に代入すると v_i のみの閉じた方程式を得る．$a_1 b_1 > 0$ の場合は有限速度の安定な直進解のみ存在することがわかる．κ_2 が小さくなると，速度方向と変形の長軸の方向（あるいは，垂直の方向）との間にずれが生じてもすぐには回復できない．そのため，直進できなくなり，軌跡が円運動を描くようになるのだと解釈できる．

6. いろいろな運動

前節では $\vec{v}$ と S のみの簡単化した方程式系を考察して，直進運動が不安定化して回転運動への分岐が存在することを示した．この節では，3 階テンソル U も加えた場合，どのような運動が現れるかを連立微分方程式 (11), (12), (13) の 2 次元空間での数値シミュレーションで調べた結果を紹介する[11]．前節の終わりで粒子の速度と変形の緩和の速さとの比が運動の安定性に重要であることを指摘した．従って，$n = \pm 2$ の変形と $n = \pm 3$ の変形の緩和率（緩和時間の逆数）である κ_2 と κ_3 を変化させたときに何が起こるかを見てみよう．

図 6 は現れる運動形態の相図である[11]．□で示した領域では直進運動，○の領域では回転運動，△の領域ではジグザグ運動，☆の領域ではカオス運動が現れる．×のパラメータでは数値解が不安定なため明確なことが言えない．2 次元での回転運動のスナップショットを図 7 に示してある．粒

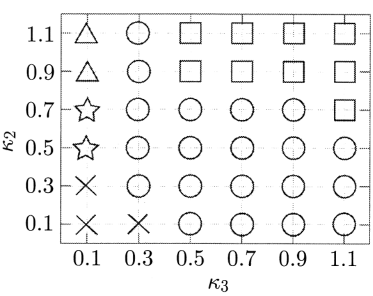


図 6　2 次元空間中での自己推進粒子の相図[11]．□の領域では直進運動，○の領域では回転運動，△の領域ではジグザグ運動，☆の領域ではカオス運動が現れる．

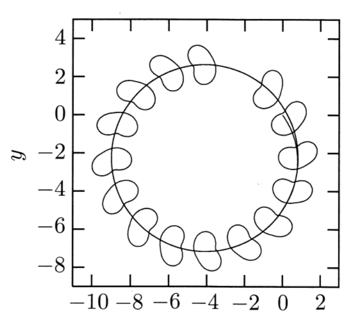


図 7　時計回りの回転運動[12]．

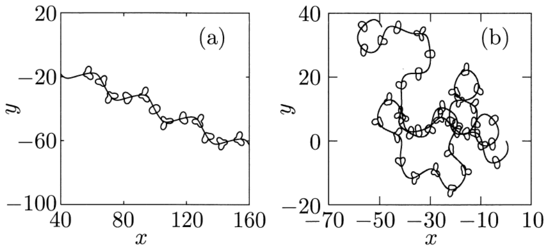


図 8　ジグザグ運動（左から右方向へ）とカオス運動[11]．

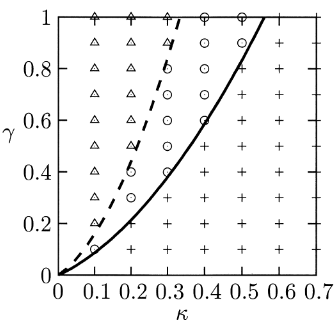


図 9　3 次元空間中での自己推進粒子の相図[13]．＋は直進運動，○は回転運動，△はらせん運動の領域．実線は直進運動と回転運動が線形不安定になる境界，点線は回転運動が線形不安定になる境界．

子は閉じた円軌道を時計回りに回転している．粒子の形はバナナ型であり，図 1 の油滴の形とよく似ている．図 8 はジグザグ運動とカオス運動である．ジグザグ運動では約 60 度の角度の方向転換を周期的に繰り返しながら，左から右へ進んでいる．もちろん，この軌道の変化に応じて粒子も周期的変形を繰り返す．カオス運動では，軌道不安定性の指標であるリャプノフ指数が正であることを数値的に確認してある．

先に述べたように，方程式 (11), (12), (13) はその係数を調節して空間 3 次元に適用することができる．変数 U_{ijk} を取り入れるのは面倒なので方程式 (11), (12) のみを考慮して得た結果が図 9 である[13]．横軸の κ は κ_2 のことである．直進運動，回転運動の他に，図 10 で表示しているように，3 次元系の特徴であるらせん（ヘリカル）運動が現れる．3 次元直進運動と回転運動解は解析的に得ることができ，その線形安定性の限界をそ

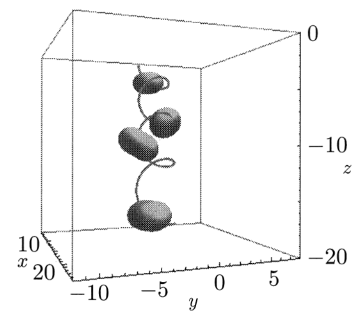


図 10　らせん運動[13]．粒子は上から下に動いている．

れぞれ実線と破線で表している．直進運動の線形安定性と回転運動の（κ が大きい側の）線形安定性限界は一致している．すなわち，同じパラメータで直進運動と回転運動が共存することは（2 次元の場合と同様）起こらない．

7. おわりに

重心の速度と変形とがカップルした場合の基本方程式 (11), (12), (13) を系の細かな性質に依らず，対称性の議論に基づき現象論的に導出した．そのダイナミクスは 2 次元，3 次元ともに豊富な内容をもつことを紹介した．ここでは係数 κ_2 と κ_3 は正である場合に限定した．すなわち，粒子が動かない状態では円（球）形であり，重心が有限の速度をもつとそれに応じて変形するという意味で変形は従属的である．しかし，アメーバやバクテリアの運動のように，ほとんどの生体系では変形が推進を生み出しているように見える．方程式 (11), (12), (13) では κ_2 と κ_3 を負にし，γ も負にすることにより，変形に誘起されて並進運動が起こる場合にも適用できることを指摘しておこう．実際，その場合はもっと多彩なダイナミクスが現れる[11]．

さらに，粒子に重力や電場などの外力が作用している場合に方程式 (11), (12), (13) を拡張することは容易である．そのとき，回転運動と外力の効果が競合して予想外の運動が見られる．また，粒子間に相互作用を導入して変形する粒子が多数

あるときの協調的ダイナミクスも調べることができる.

自己推進粒子の数理的研究は過去15年間にたいへん多くなされてきた. しかし, 変形を考慮した研究はほとんどされていなかったのは不思議である. 上に述べたこと以外にも, 方程式 (11), (12), (13) を一般化して調べるべき重要な現象はたくさんあるように思われる. 読者諸氏の中から柔軟な発想でそのような課題にチャレンジする人がでてくることを期待する.

原稿に対して有益なコメントをいただだた菅原正氏, 平岩徹也氏, 永井健氏, 長山雅晴氏に感謝の意を表します.

参考文献

1) S. Camazine 他：*Self-Organization in Biological Systems*, Princeton Univ. Press (2001).
2) 長山雅晴：数理科学, No.535 (2008).
3) K. Nagai, Y. Sumino, H. Kitahata, and K. Yoshikawa, *Phys. Rev. E* **71**, 065301(R) (2005).
4) 菅原正, 鈴木健太郎：「分子科学の挑戦—可塑的応答・自立運動・自己生産する超分子システム—」, *Molecular Science*, **4**, A0033 (2010).
5) W.F. Paxton 他：*J. Am. Chem. Soc.* **128**, 14881 (2006).
6) H.-R. Jiang, N. Yoshinaga, M. Sano: *Phys. Rev. Letters*, **105**, 268302 (2010).
7) K. Krischer, A. Mikhailov: *Phys. Rev. Letters*, **73** 3165 (1994).
8) Y.T. Maeda 他：*PLoS one*, **3** e3734 (2008).
9) L.G. Fel: *Phys. Rev. E* **52**, 702 (1995).
10) T. Ohta, T. Ohkuma: *Phys. Rev. Lett.* **102**, 154101 (2009).
11) T. Hiraiwa, Y. Matsuo, T. Ohkuma, T. Ohta, M. Sano: *Europhys. Lett.* **91**, 20001 (2010).
12) T. Ohta, T. Ohkuma, K. Shitara: *Phys. Rev. E* **80**, 056203 (2009).
13) T. Hiraiwa, K. Shitara, T. Ohta: *Soft Matter* **7**, 3083 (2011).

（おおた・たかお, 京都大学大学院理学研究科）

古典力学における線形と非線形

柴山　允瑠

1. はじめに

ニュートンの運動法則「質量 × 加速度 = 力」に基いて構成された力学の理論体系を**古典力学**という．古典力学に現れる常微分方程式のほとんどは非線形であり，解くことは難しい．3 体問題を初め，古くからある問題でも全容の解明にほど遠い常微分方程式も珍しくない．

ここでは，いくつかの具体例を通して，古典力学における線形性と非線形性の特性や関連性を紹介する．まず，線形方程式であるバネ振動の運動方程式において，外力による効果について述べる．次に，非線形方程式である外力付き振り子の運動方程式を解析する中で，線形性と非線形性が交錯する様子を概観する．最後に，n 体問題は非線形性の強い微分方程式だが，実はある部分には線形性が内在しており，そのことが問題をより一層困難にしているという側面に触れる．

2. バネ振動

バネが水平に置かれ，1 点は固定され，もう 1 点に質量 m の物体が付いているとする．物体が静止しているときの位置を原点とした水平な座標における物体の位置を q とする（図 1）．このとき物体の運動方程式は，バネによる力がフックの法則に基づくとすると，

$$m\frac{d^2q}{dt^2} = -kq$$

と表される．$k > 0$ はバネの弾性定数である．この方程式は q とその導関数の線形な関係式であるので，斉次**線形**常微分方程式である．$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ とおくと，一般解（すべての解）は

$$q(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$$

と表せる．ここで**すべての周期解の周期が同じになるが，これは線形常微分方程式の一つの特徴である．**

次に，バネの固定していた端点を周期的に動かした場合を考える（図 2）．そのようなモデルとして運動方程式

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\omega^2 q + \varepsilon\cos\nu t$$

が考えられる．$\varepsilon \geq 0, \nu > 0$ は定数とする．この方程式は非斉次の線形常微分方程式であり，外力がない場合の解をもとに定数変化法で解くことが

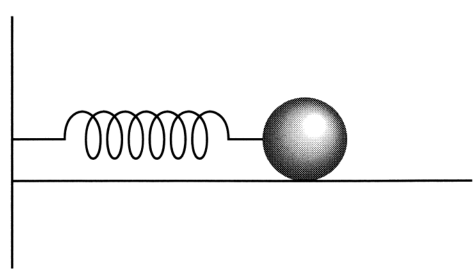


図 1　バネ振動．

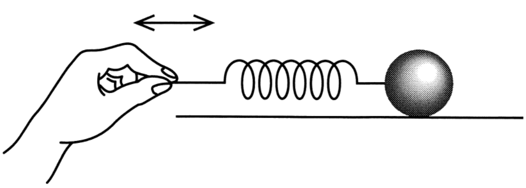


図 2　外力付きバネ.

できる．

$\omega \neq \nu$ であれば一般解は

$$q(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t + \frac{\varepsilon}{\omega^2 - \nu^2}(\cos\nu t - \cos\omega t)$$

である．$\omega = \nu$ のとき，一般解は

$$q(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t + \frac{\varepsilon}{2\omega} t \sin\omega t$$

と表される．外力なしのバネ振動においてはすべての解は有界であったが，弱い外力であっても適当な周期をもつ外力が加わるとすべての解が非有界になることが分かる．つまり，**外力なしのバネ振動の安定的な構造は大変壊れやすいと言える．**

3. 振り子

3.1 振り子と外力付き振り子

振り子の運動を考える．軽い棒があり，その棒の一端の位置は固定され，そこを中心に棒は滑らかに回転できるとする．もう一端には物体が付いており，この物体の振舞いを調べることを問題とする（図 3）．

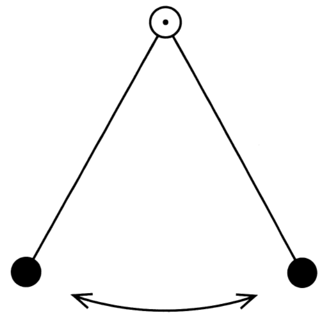


図 3　振り子.

このとき，棒が鉛直下方向となす角を q とすると物体の運動方程式は

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\rho^2 \sin q$$

と表される．$\rho = \sqrt{\frac{g}{l}}$ で g は重力定数，l は棒の長さである．ここで，運動量 $p = \frac{dq}{dt}$ を用いると，1 階の微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= p, \\ \frac{dp}{dt} &= -\rho^2 \sin q \end{aligned} \qquad (1)$$

と表される．この方程式は**非線形**だが，解の振舞いはエネルギー保存則によりよく分かる．振り子の運動に関するエネルギーは

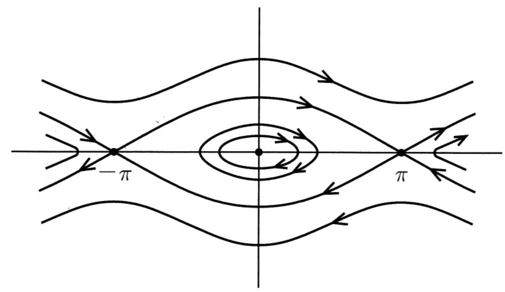


図 4　振り子の相図.

$$E = \frac{1}{2}p^2 - \rho^2 \cos q$$

で定まる．E を固定することで，qp 平面において解を図示できる．**周期解毎に周期は異なり，振幅が無限に小さいときには $2\pi/\rho$ で，振幅が大きくなるにつれて長くなる**（図 4）．

方程式 (1) において，$(q(t), p(t)) \equiv (0, 0)$ が一つの解になる．この点 $(0, 0)$ のように，その点自身が一つの解になる点を平衡点という．平衡点近傍の任意の解がずっと平衡点の近くにい続けるとき，平衡点は安定であるという[*1]．振り子 (1) について平衡点 $(0, 0)$ は安定である．

次に，棒の支点を周期的に上下に振動させたときの振り子の運動を考える（図 5）．そのような外力付き振り子の方程式として

*1)　正確には，常微分方程式 $\dot{x} = f(x, t)$ の平衡点 a について，a の任意の近傍 U に対して次を満たす a の近傍 $V(\subset U)$ が存在するとき a は安定という：任意の $b \in V$ に関して $x(0) = b$ となる解 $x(t)$ が $t \geq 0$ において $x(t) \in U$ となる．

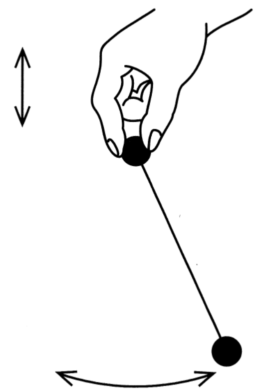


図 5　外力付き振り子.

$$\frac{dq}{dt} = p,$$
$$\frac{dp}{dt} = (-\rho^2 + \varepsilon \cos \nu t) \sin q \qquad (2)$$

が考えられる．ここで，$\varepsilon \geq 0, \nu > 0$ は定数である．(2) においても，$(0,0)$ は平衡点である．以下では，この平衡点の安定性について調べる．

3.2 マシュー方程式

0 を中心とする $\sin q$ の 1 次のテイラー展開は

$$\sin q = q + o(q^2)$$

なので (2) は $(0,0)$ の近傍において

$$\frac{dq}{dt} = p,$$
$$\frac{dp}{dt} = (-\rho^2 + \varepsilon \cos \nu t) q \qquad (3)$$

により近似される．(3) をマシュー方程式という．線形常微分方程式でもマシュー方程式のように係数が t に依存する場合には解くことは難しい．

$$A_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\rho^2 + \varepsilon \cos \nu t & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと，マシュー方程式は

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = A_\varepsilon(t) \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \qquad (4)$$

と表される．$\xi_\varepsilon(t), \eta_\varepsilon(t)$ を

$$\xi_\varepsilon(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_\varepsilon(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を満たす (4) の解とする．t に依存する 2 次正方行列 $X_\varepsilon(t)$ を $X_\varepsilon(t) = (\xi_\varepsilon(t), \eta_\varepsilon(t))$ により定める．方程式の線形性から，$t = 0$ で初期値を決めたとき，(4) の解は

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = X_\varepsilon(t) \begin{pmatrix} q(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$$

となる．$F_\varepsilon = X_\varepsilon(2\pi/\nu)$ とおく．F_ε をフロケ行列という．$A_\varepsilon(t)$ の右辺が t について $2\pi/\nu$-周期であることから，整数 n に対して

$$X_\varepsilon\left(\frac{2\pi n}{\nu}\right) = F_\varepsilon^n$$

が成立する．このことから，(4) における解の安定性などの定性的な性質を知るには F_ε について調べれば十分である．

$\varepsilon = 0$ ならば，係数が時間に依存しない線形方程式となるので，

$$F_0 = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi\rho}{\nu} & \frac{1}{\rho} \sin \frac{2\pi\rho}{\nu} \\ -\rho \sin \frac{2\pi\rho}{\nu} & \cos \frac{2\pi\rho}{\nu} \end{pmatrix}$$

と求まる．座標系 $(Q, P) = (q, \rho^{-1} p)$ では，F_0 による変換は原点の周りの $-\frac{2\pi\rho}{\nu}$ 回転を表す行列である．

$\varepsilon > 0$ に対する F_ε を具体的に求めるのは困難であるが，$\operatorname{tr} A_\varepsilon = 0$ であることから $\det F_\varepsilon = 1$ が導かれる．ρ, ν を固定し，ε を 0 から変化させる．F_0 の固有値は $\cos \frac{2\pi\rho}{\nu} \pm i \sin \frac{2\pi\rho}{\nu}$ である．$\frac{2\rho}{\nu}$ が整数でなければ，F_ε の固有値は ε に対して連続的に変化するので，十分小さな $\varepsilon > 0$ に対しても絶対値が 1 で互いに複素共役な複素数の組となり，F_ε も回転を表す行列と相似になる．従って，(4) において平衡点 $(0,0)$ は安定である．

$\frac{2\rho}{\nu}$ が整数の場合は，$\varepsilon > 0$ とするとただちに F_ε の固有値は絶対値が 1 より大きい実固有値と小さい実固有値の組になり得る．より精密な計算により，実際に固有値はこのようになることが示せる．1 より大きい固有値に対する固有ベクトル方向には F_ε の変換により遠方に離れていく．従って，(4) において平衡点 $(0,0)$ は不安定になる（図 6）．

3.3 平衡点の安定性

線形項 F_ε について得られた結果をもとに，も

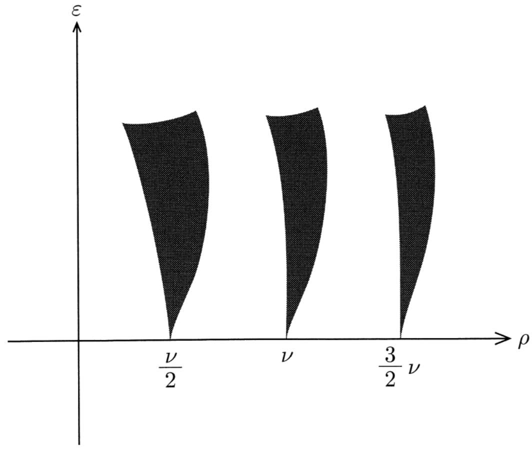


図 6　平衡点が不安定となる (ν, ε).

との微分方程式 (2) の $(0,0)$ の近傍における振舞いについて調べる．

$\phi_\varepsilon^t(q_0,p_0)$ を $\phi_\varepsilon^0(q_0,p_0) = (q_0,p_0)$ を満たす (2) の解とする．各 (q,p) に対して，$\Phi_\varepsilon(q,p) = \phi_\varepsilon^{2\pi/\nu}(q,p)$ により写像が定まる．この写像をポアンカレ写像という．フロケ行列と同様に，(2) の右辺が t について $2\pi/\nu$-周期であることから，

$$\Phi_\varepsilon^n(q,p) = \varphi_\varepsilon^{2\pi n/\nu}(q,p)$$

が成立する．$\Phi_\varepsilon(0,0) = (0,0)$ であるので，$(0,0)$ は Φ_ε の不動点であるという．$F_\varepsilon = D\Phi_\varepsilon(0,0)$*2) が成立し，$F_\varepsilon$ はポアンカレ写像 Φ_ε の $(0,0)$ を中心とした 1 次近似を与えている．

$\frac{2\rho}{\nu}$ が整数で $\varepsilon > 0$ が小さい場合に，F_ε が絶対値が 1 の固有値を持たない．このようなとき，$(0,0)$ は Φ_ε の双曲型不動点であると呼ばれる．Φ_ε の双曲型不動点 $(0,0)$ の近傍における写像 Φ_ε は，F_ε による線形写像と定性的に（力学系的な性質として）同じである*3)（ハートマン–グロブマンの定理）．従って，このとき外力付き振り子についても平衡点 $(0,0)$ は不安定である．

$\frac{2\rho}{\nu}$ が整数でなく $\varepsilon > 0$ が小さい場合には，F_ε のすべての固有値の絶対値が 1 であった．このようなとき $(0,0)$ を Φ_ε の楕円型不動点であると呼ばれる．楕円型不動点近傍では，一般にはポアンカレ写像は線形化写像と異なる振舞いをする．F_ε の固有値を λ, λ^{-1} とする．$\lambda^3 \neq 1$ かつ $\lambda^4 \neq 1$ が成り立つと仮定する（非共鳴条件）．このとき，$(0,0)$ を $(0,0)$ に移し $(0,0)$ の近傍で定まるある（正準）変換 $(q,p) = g_\varepsilon(\xi,\eta)$ により，$(\xi_1,\eta_1) = g_\varepsilon^{-1} \circ \Phi_\varepsilon \circ g_\varepsilon(\xi_0,\eta_0)$ は

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos h_\varepsilon(\tau) & \sin h_\varepsilon(\tau) \\ -\sin h_\varepsilon(\tau) & \cos h_\varepsilon(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} + O(\|(\xi_0,\eta_0)\|^5) \quad (5)$$

と表すことができる．ここで，

$$\tau = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)$$

であり，$h_\varepsilon(\tau)$ は τ の 1 次式である．(5) は，正準写像に対するバーコフ標準形と呼ばれるものの 4 次の場合である．

高次の項 $O(\|(\xi_0,\eta_0)\|^5)$ を消去してみると，τ は $g_\varepsilon^{-1} \circ \Phi_\varepsilon \circ g_\varepsilon$ によって変化しないから $\tau = c$ と固定すると，一つの円周が定まる．その上の点に対し，$g_\varepsilon^{-1} \circ \Phi_\varepsilon \circ g_\varepsilon$ で移すことは角 $-h_\varepsilon'(c)$ の回転である．従って，不動点 $(0,0)$ は円周たちの層（葉層構造）で囲まれている．

ここでバーコフ標準形に対するツイスト条件と呼ばれる条件 $h_\varepsilon'(0) \neq 0$ が成立していれば，高次の項 $O(\|(\xi_0,\eta_0)\|^5)$ が加わっても，$(0,0)$ の周辺に取り囲む円周が少し変形するが多くは生き残り，その上では円周上の一定の回転数の回転と定性的に同じであることが保証される（KAM 定理の応用）．実際に，$3\rho/\nu$ と $4\rho/\nu$ が整数とならない場合は，十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して Φ_ε のバーコフ標準形はツイスト条件を満たすことが示せる．$(0,0)$ の近傍を小さくすればするほど，その中における不変閉曲線の測度の割合は 1 に近づく．

3.4 大域構造

KAM 理論は元来，古典力学において解ける系を少し動かしたときに不変閉曲線の存在を保証する理論である*4)．平衡点近傍の解析では，不動点を

*2)　$D\Phi_\varepsilon(0,0)$ は $\Phi_\varepsilon(p,q)$ の $(0,0)$ におけるヤコビ行列である．

*3)　正確にいうと，位相共役である．

*4)　正確にいうと，ハミルトン力学系において準周期解をもつ可積分系を摂動したときに準周期解の存在を保証する理論である．

中心とした級数の高次の項を摂動項としてKAM理論を適用したのだが，ここでは外力を摂動項として応用する．

外力のない振り子（$\varepsilon = 0$）は可積分系と呼ばれるものになっている．$\varepsilon = 0$ のとき，エネルギーを固定することで $(0,0)$ を囲む周期解の族が定まっていた．一つの周期解が定める閉曲線上に (q,p) をとると $\Phi_0^n(q,p)$ は同じ閉曲線上の点列となる．それは，各閉曲線に制限したときに Φ_0^n による変換は，円周上の一定の回転角の回転と同等になる．振り子では周期解毎に周期が異なったことから，閉曲線毎に対応する回転角が異なる．このことは，実は可積分系に対するツイスト条件が成立していることを意味する．

小さな $\varepsilon > 0$ にすることは，この写像を微小に変化させることとなる．この場合，ツイスト条件によりKAM理論（の正準写像版）が適用できて，定義されていく範囲において多くの不変閉曲線が生き残る．そして，各閉曲線上では，円周上の回転と同等である．$\varepsilon > 0$ が小さいほど，生き残る不変閉曲線全体の測度は，$\varepsilon = 0$ のときの $(0,0)$ を取り囲む周期解全体の測度に近い（図7）．

平衡点近傍のバーコフ標準形にKAM理論を適用したとき非共鳴条件を仮定したが，ここでは $(0,0)$ が共鳴の場合にも適用できる．$2\rho/\nu$ が整数の場合は，平衡点 $(0,0)$ は不安定化するが，その不安定な領域は非常に小さく，その不安定領域は不変閉曲線に囲まれている．

経験的には，最初振りが小さくても，適当な外力により次第に大きな振りにできそうな気もするかもしれない．ここで分かったことは，周期的な微小外力では振幅をわずかにしか大きくすることができず，振幅をより大きくするには外力を与えるタイミングを周期的でなく位置や運動量に応じて変化させる必要があるということである．そして，そのような外力を加えた系はKAM理論が適用できる保存系という枠内に入っていない．

KAM理論を適用する際に本質的な役割を果たすのが，ツイスト条件である．平衡点近傍の場合も可積分系の摂動についても，**ツイスト条件は線形な系では成立しない**．バネ振動では微小外力によりすべての解が非有界になったように，線形系の摂動にはKAM理論は適用できない．微小外力の振り子の平衡点 $(0,0)$ は「ほぼ安定」であるといえるが，**その安定性は振り子のもつ非線形性が保証していると言える**．KAM理論は摂動問題を考える際に起こる小分母の問題という問題を非線形性を積極的に利用して解消した成果と言える．

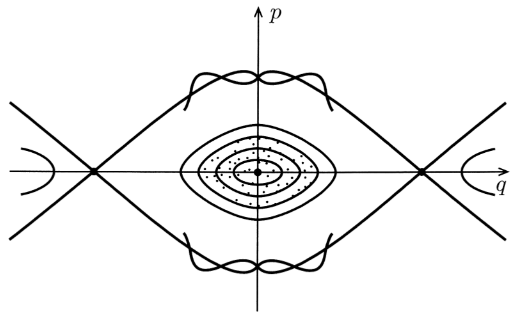


図7　$\varepsilon > 0$ のときのポアンカレ写像．

4. 天体力学

ここからは，天体力学について論ずる．n 個の質点が万有引力により引き合っているときの運動を調べる n 体問題は常微分方程式

$$\frac{d^2 q_k}{dt^2} = \sum_{j \neq k} \frac{G m_j}{\|q_j - q_k\|^3}(q_j - q_k) \qquad (6)$$

の解を求める問題として定式化される．ここで，G は万有引力定数，$m_k > 0$ と $q_k \in \mathbb{R}^3$ は質点の質量と位置である．

4.1 ケプラー問題の線形化

天体力学の最も基本的な問題は，惑星の運動に関するケプラー問題である．太陽からの引力を受ける惑星の運動を考える．角運動量保存則より惑星は平面上を運動することが分かるので，最初から平面上のケプラー問題を考える．太陽は原点にあるとし，単位を変更して万有引力定数と質量は1とする．惑星の位置を $q = (q_1, q_2)$，運動量を $p = (p_1, p_2)$ とすると，運動方程式は

$$\frac{dq}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{1}{\|q\|^3} q$$

である．ここで，

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{2}(z_1^2 - z_2^2), \\ q_2 &= z_1 z_2, \\ p_1 &= \frac{z_1 w_1 - z_2 w_2}{z_1^2 + z_2^2}, \\ p_2 &= \frac{z_2 w_1 + z_1 w_2}{z_1^2 + z_2^2} \end{aligned}$$

により定まる座標変換をする*5)．エネルギーは，この座標では

$$E = \frac{1}{2\|z\|^2}\|w\|^2 - \frac{2}{\|z\|^2}$$

である．ここで，$z = (z_1, z_2), w = (w_1, w_2)$ である．微分方程式はエネルギーを E に固定すると，

$$\begin{aligned} \frac{dz_\ell}{dt} &= \frac{1}{\|z\|^2} w_\ell, \\ \frac{dw_\ell}{dt} &= \frac{2E}{\|z\|^2} z_\ell \end{aligned} \qquad (\ell = 1, 2)$$

と表せる．さらに，$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\|z\|^2}$ により時間を変換すると線形方程式

$$\frac{dz_\ell}{ds} = w_\ell, \quad \frac{dw_\ell}{ds} = 2E z_\ell \quad (\ell = 1, 2)$$

になる．これはバネ振動と同様の定数係数の**線形**微分方程式であり，解くことができる．

4.2 太陽系

太陽系では太陽の周りにいくつかの惑星が運動しているが，惑星が太陽だけから引力を受けているとすると，それぞれがケプラー問題に従うので解ける．全体として，分離したケプラー問題である．解は周期関数の重ね合わせで構成され，そのような解を準周期解という．各惑星の周期を定めると，トーラスが決まる．全体として，トーラスが層をなし，各準周期解は一つのトーラス上にある．

では，惑星どうしの弱い引力も考慮すると運動はどうなるであろうか？ この問題を解決することが，KAM 理論の確立にもつながった摂動論の大きな動機の一つであった．KAM 理論は，摂動後も多くの準周期解が生き残ることを保証するが，KAM 理論ではツイスト条件という仮定が必要であった．ツイスト条件は非線形でないと成立しない．ケプラー問題は線形化方程式に変換できることから，実は太陽系モデルではツイスト条件は成立しない．**ケプラー問題に内在する線形性が，摂動論においては妨げになっており，太陽系モデルにおける準周期軌道の存在証明には更なる困難を伴う**．この問題は，KAM 理論の確立から数十年を経て，近年解決された[2]．

古典力学を含む保存系において，KAM 理論の応用は多様にある．天体力学において，太陽系モデル以外にも KAM 理論による成果は多い．最後に KAM 理論の天体力学への応用例に触れる．

4.3 ラグランジュ点の安定性

3 体問題において一つの質点の質量を無限小とし，その無限小の質点の運動を調べる問題を制限 3 体問題という．制限 3 体問題にしても解を求めるのは困難であるが一般の 3 体問題よりは扱いやすい．また，小惑星（あるいは惑星探査機）が地球と太陽（または地球と月，太陽と木星）からの引力を受けるときの運動を調べるモデルとして応用上の重要性も高い．

特に平面上を運動する太陽–木星–小惑星モデルを考え，太陽と木星の質量比が $(1-\mu) : \mu$ で，これらが円運動をしている場合を考える．その 2 質点が定点に静止するような回転座標系を用いる．この座標系において太陽と木星とで正 3 角形の頂点をなす 2 点はラグランジュ点 L_4, L_5 と呼ばれる平衡点である*6)（図 8）．L_4, L_5 は質量比が

$$\mu < \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{69}}{9}\right) = 0.0385\ldots$$

の場合，楕円型である．これらの点に関してほとんどの場合，非共鳴条件とツイスト条件の平衡点版は成立し，安定性が示される．例外的にツイスト条件を満たさない場合も，より高次のバーコフ

*5) $z_1 + iz_2$ の複素数としての 2 乗の 1/2 倍が $q_1 + iq_2$ であり，w_1, w_2 はそれから自然に定まる運動量である．この変換は正準変換と呼ばれるものになっている．

*6) 正確には，位置が L_4 または L_5 で回転座標系における運動量が 0 となる点が微分方程式の平衡点である．他にも太陽と木星を含む直線上に 3 点の平衡点 L_1, L_2, L_3 がある．

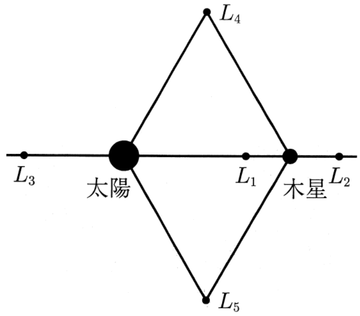


図 8　ラグランジュ点.

標準形を調べ，広義のツイスト条件を満たすことを確認することで，安定性が保証される.

実際の太陽と木星では μ はおよそ 0.0009536 であるから安定性が成立し*7)，実際に L_4, L_5 に相当する点付近には小惑星が数千個観測されている.

4.4 8 の字解

近年になって発見された 8 の字解[1]の安定性も興味深い（図 9）. これは等質量の平面 3 体問題の周期解である. この解の存在は変分法により保証されており，解を具体的な関数で表わすことはできていない. 従って，その安定性の研究は困難である*8).

シモ[5]の数値計算によると 8 の字解に関するポアンカレ写像の本質的な 4 つの固有値は絶対値が 1 の複素数 $\lambda_j = \exp(\pm 2\pi i \nu_j)$ $(j = 1, 2)$ である*9). ここで,

$$\nu_1 = 0.0084227247, \quad \nu_2 = 0.2980925290$$

である. よって，この周期解は楕円型である. λ_1 は実数に近くてきわどいが，このきわどさには何か意味があるのかどうかは分かっていない. さらに 8 の字解を中心とするバーコフ標準形に関するツイスト条件も成立する. これらは，精度保証付き数値計算により証明されている[3,4]. 従って，8 の字解を多くの不変トーラスが取り囲んでおり，各

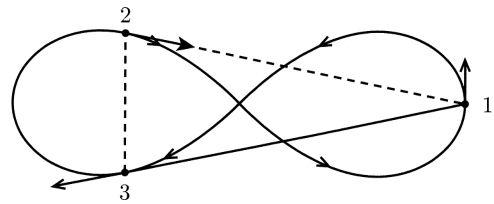


図 9　8 の字解.

トーラス上の解は準周期解である. しかし，8 の字解は安定とは限らない. 保存量や対称性による簡約をしても，トーラスの余次元が 2 次元あるので，不変トーラスの隙間の不安定領域の解が隙間に閉じ込められず遠くに離れていく可能性がある. そのような現象をアーノルド拡散という. アーノルド拡散は非常にデリケートな現象で数値計算による検出も困難であり，8 の字解近傍で起こっているかどうかは分かっていない.

*7) 本来は空間の制限 3 体問題で考えるべきだが，その設定でも（KAM）安定性は成立する.

*8) 解が関数表示できていても易しいとは限らない.

*9) 方程式の性質から，固有値は逆数とペアで現れる. 4 つの複素数が実数でなく，さらに互いに逆数，複素共役の 4 つ組になっていなければ，絶対値が 1 であることがいえる.

参考文献

1) A. Chenciner & R. Montgomery, A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses. *Ann. of Math.* **152** (2000), 881–901.

2) J. Féjoz, Démonstration du ‘théorème d’Arnold’ sur la stabilité du système planétaire, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **24** (2004), 1521–1582.

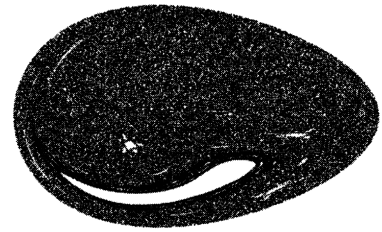
3) T. Kapela & C. Simó, Computer assisted proofs for nonsymmetric planar choreographies and for stability of the Eight, *Nonlinearity*, **20** (2007), 1241–1255.

4) T. Kapela & C. Simó, Rigorous KAM results around arbitrary periodic orbits for Hamiltonian Systems, preprint, arXiv:math/1105.3235.

5) C. Simó, Dynamical properties of the figure eight solution of the three-body problem, *Contemp. Math.* **292** 209–28.

（しばやま・みつる，大阪大学大学院基礎工学研究科）

量子力学の非線形ダイナミクス



ポアンカレ面（本稿図 2 a）より）.

高塚　和夫・高橋　聡

1. 線形方程式に内在する非線形性

量子力学の基本方程式の一つであるシュレディンガー方程式は波動方程式であって，まさに線形方程式である．その解は，線形性の最も重要な性質である「重ね合わせの原理」を満足する．その線形方程式が，どのようにして非線形性を表現し得るのかを調べたい（従って，非線形シュレディンガー方程式などは，もともと本稿の検討の埒外であることをお断りしておく．また，散逸現象を記述するためのユニタリーではない時間発展方程式，例えばLindblad 方程式もここでは考えない）.

本特集の至る所で説明されていると思うが,「非線形現象」とは，互いに相互作用し合う多部分系からなる系において，各部分系の間での物質・エネルギー・情報などの輸送の遅れ（timelag）とそれによって引き起こされる応答の連鎖が原因となって発生する現象である．もっと簡明に,「結果が原因となって帰ってくる連鎖を持つ現象」ということもできるだろう．

一方，形式的数学の立場からは，方程式が線形でないものは，実態の如何によらず，すべて非線形現象と呼ばれる資格がある．しかし，だからといって，シュレディンガー方程式のような「線形方程式系の解は，非線形現象を記述しない」ということにはならない．例えば，多粒子多次元系の非調和ポテンシャル上の古典力学運動を表すハミルトンの正準方程式

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{1}$$

を考える．以下, q と p は, 粒子の座標とその共役な運動量とし，ベクトル量と思っていただきたい．H は古典ハミルトニアンである．例えば，2 次元 x, y 座標で

$$H(x,y) = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + x^2y^2 \tag{2}$$

を代入すると，式 (1) は非線形であることがすぐ分かる（本稿では一貫して，特に断らない限り，どの質量も 1 となるように座標を変換しておく）．実際，非線形現象の一つの典型であるカオス運動を生み出す．それに対して，正準方程式と同等なリュウビル（Liouville）方程式（相空間つまり (q,p) 空間上の粒子の分布関数 $\Gamma(q,p,t)$ のための方程式）

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p}\right]\Gamma(q,p,t) = 0 \tag{3}$$

は，線形方程式である．カオスを生み出すような古典力学的非線形現象も線形方程式の形に書けるというわけである．これを代表的な例示として,「カオスは線形方程式（例えばシュレディンガー方程式）からは生まれないという主張は正しくない」といわれることがある．

ただし，これには少し注意が必要である．リュウビル方程式の解は，外場の影響がなければ，古典軌道 $(q(t), p(t))$ を使って

$$\Gamma(q(t),p(t),t) = \Gamma(q(0),p(0),0) \tag{4}$$

と書かれる．これは, 分布関数の高さ (値) が相空間の中で保存される, と言っているので, 明らかに線形性を持つ．それでいて，古典軌道 $(q(t), p(t))$ のほうは，カオスになっていてもかまわない．つまり, $\Gamma(q(t),p(t),t)$ は，カオスの「台」の上に乗った線形関数ということであって，非線形動力学と方程式の線形性は，矛盾しないで共存できるのである.

2. 部分系の相互作用の量子論

シュレディンガー方程式が線形であっても,「互いに相互作用し合う多部分系からなる系において，各部分系の間での物質・エネルギー・情報などの輸送の遅れ（timelag）とそれによって引き起こされる応答の連鎖」

という現象が記述できないはずはない．その代表的な方法論の一つは，以下のようなものである．ある系のシュレディンガーダイナミクス

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(q,t) = \hat{H}\psi(q,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2}\vec{\nabla}_q^2 + V(q)\right]\psi(q,t) \quad (5)$$

を考えよう．この系の状態の空間が 2 つに分けられると仮定し，それぞれの部分空間を射影演算子 P と Q で指定する．これらは，以下の性質を満たす．

$$PP = P, \quad QQ = Q, \quad QP = PQ = 0, \quad P + Q = 1. \quad (6)$$

まず，これらを使って，式 (5) を 2 つに分けて，それらの連立方程式に書き換える：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_P(q,t) = \hat{H}_{PP}\psi_P(q,t) + \hat{H}_{PQ}\psi_Q(q,t), \quad (7)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_Q(q,t) = \hat{H}_{QQ}\psi_Q(q,t) + \hat{H}_{QP}\psi_P(q,t). \quad (8)$$

ここで

$$\psi_P(q,t) = P\psi(q,t), \quad \hat{H}_{PQ} = P\hat{H}Q \quad (9)$$

などと定義する．これらから，形式的に方程式 (7) を積分することができて

$$\psi_P(q,t) = \exp\left(\frac{1}{i\hbar}\hat{H}_{PP}t\right)\psi_P(q,0) + \frac{1}{i\hbar}\int_0^t ds \exp\left(\frac{1}{i\hbar}\hat{H}_{PP}(t-s)\right)\hat{H}_{PQ} \times \exp\left(\frac{1}{i\hbar}\hat{H}_{QQ}s\right)\psi_Q(q,0) \quad (10)$$

のようになる．分割されたそれぞれの方程式 (7) と (8)，および (10) はそれぞれ個別には線形の形をしていないことは明らかである．例えば，式 (7) で $\hat{H}_{PQ}\psi_Q(q,t)$ の部分に何らかの近似などを導入すると，非線形性がもっと露わになる．また，時間の反転対称性も破ることになるから，結果として非平衡現象を扱うことにもなる．式 (10) の意味は簡明で，時刻 t における部分系 P の波動関数は，もう一つの部分系 Q とは無関係にそれ自体で独自に時間発展してくる成分と，部分系 Q の成分が時刻 s まで時間発展してから部分系 P と相互作用し，その効果が部分系 P の波動関数として残り時間を過ごすというものの重ね合わせで表される，というものである．ただし，遷移の時刻 s は，変数であり，すべての可能な時刻について積分する必要がある．上の式 (10) では，遷移は一度しかしないように見えるが，$\psi_Q(q,t)$ に対して式 (10) のように表現した式と組み合わせると，「何度も何度も 2 つの部分系の間を遷移する状態の重ね合わせ」ということが分かる．結局，部分系 P で発生した事象が，部分系 Q に伝わり，そこで時間遅れを起こして，再び部分系 P に回帰する，という現象の総体の量子論的重ね合わせが表されていることになる．

上の議論における空間の分割として，実際に実空間で行うことも可能だし，ヒルベルト空間のような抽象的な関数空間で実行してもよい．また，系を 3 個以上の部分系に分けたり，多成分系に拡張する，ということは容易である．しかし，2 つの部分空間が時間に依存せず画然と分かれるということは，普遍的とはいいがたく，それらの間の境界が不分明であったり，時間とともに変動する場合には，理論の拡張を考えなければならない．それはともかく，線形シュレディンガー方程式から非線形現象を記述する準備が整ったという意味では重要である．

上のように状態空間を 2 つに分ける方法論は，一般に分割手法（partitioning technique）と呼ばれる．Mori（森）[1] と Zwanzig[2] は，統計力学の立場から，密度行列を使ってこの手法を開発した．特に，森は連分数展開法を使って，部分空間の間の多数回の相互作用を階層的に表現している．その意味合いも明瞭である．固有値問題を解く観点から，Löwdin は定常状態シュレディンガー方程式において分割手法を独自に開発し，量子力学的摂動論の統一的記述を成し遂げた[3]．Feshbach は散乱理論の分割手法を導入し，その名を冠する共鳴状態の理論を完成させた[4]．

部分系に注目して，全体像を近似するという立場から，誰でも知っている常識的なことを一つ思い起こしておこう．例えば，原子や分子の電子状態などのような多体問題を考える出発点として，平均場の近似を用いることが一般的である．これは多体問題をひとまず一体問題に（近似的に）帰着させるもので，Hartree–Fock 法が典型例である[5]．その際，帰着された一体運動方程式は，Fock 演算子のように，本来求めなければならない関数の汎関数の形（微積分方程式）をしている．これは，線形方程式を非線形方程式に（近似的に）変換した例である．実は，線形のシュレディンガー方程式を無理やり非線形方程式に書き直すことは，特に難しいことではない．特に重要な例として，Bohm の quantum potential を挙げておきたい[6,7]．

紙幅がないので，述べることはできないが，部分系の量子的相互作用という観点から，量子力学的絡み合い（quantum entanglement）や，量子位相の decoher-

enceのダイナミクスなどが，量子情報論などに関連して注目されている．また，2つの部分系が相互作用しながら接しているとき，その一方が量子系（速いタイムスケールを持つ量子系）で他の一方が「古典系」（非常に遅くて古典力学風に近似できる量子系）であるという場合を考えることができるが，その際，量子系から「古典系」にどのようにして量子効果が染み込んでいくか，というような興味深い問題も存在している[8)]．

3. 古典非線形性と量子論

次に，「空間の分割による相互作用の遅れの表現」とは別に，量子論そのものの運動学的な側面を考えてみたい．

第1節で，リュウビル方程式は線形であるけれども，非線形性を生み出す力学系の台に乗っているという議論をした．リュウビル方程式の場合は，式(3)と(1)を比べれば，力学の台が古典力学であることが直ちに確認できる（実際は，その事実を利用してリュウビル方程式が作られているのだ）．それでは，シュレディンガー方程式は，どのような力学系の台に乗っているのだろうか？ 式(5)を見てもすぐには分かりそうもない．

一つの考え方は，古典リュウビル方程式(3)に戻ることを試みることである．波動関数は，確率振幅関数なので，リュウビル方程式の相空間分布関数に類似の量であるWignerの相空間分布関数

$$W(q,p) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^N \int \psi^*\left(x-\frac{q}{2},t\right) \times \psi\left(x+\frac{q}{2},t\right)\exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right)dx \tag{11}$$

を作ってみる．この関数のための運動方程式は，複雑な形をしていて，プランク定数の冪展開で表される線形方程式である（略す）[9)]．興味深いことに，その最低次の項として，古典リュウビル方程式が現れるのである．このようにして，量子論と古典論との関係（ひいては線形理論と非線形現象の関係）の一つの現れ方が確認でき，さらに高次の項まで調べれば，量子論の力学の台がより深く見えてくるはずである．そのようなシナリオで量子・古典の対応関係を調べている研究者もいる．

ここでは，もう少し簡明な方法で，量子力学の力学系の台のあり方を調べてみよう．まず波動関数 $\psi(q,t)$ を次のように変換する

$$\psi(q,t) = F(q,t)\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_{\rm cl}(q,t)\right), \tag{12}$$

ここで，$S_{\rm cl}(q,t)$ は古典力学のハミルトン・ヤコビ方程式を満たし，

$$\frac{\partial S_{\rm cl}(q,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\nabla S_{\rm cl}(q,t)\right)^2 + V(q) = 0 \tag{13}$$

を満たすものとする．すると，変換された関数 $F(q,t)$ は

$$\frac{\partial F(q,t)}{\partial t} = \left(-\vec{v}\cdot\nabla - \frac{1}{2}(\nabla\cdot\vec{v})\right)F(q,t) + \frac{i\hbar}{2}\nabla^2 F(q,t) \tag{14}$$

を満たす．ただし，

$$p = v(q,t) = \nabla S_{\rm cl}(q,t) \tag{15}$$

で与えられる．この関数 $F(q,t)$ を，ADF（Action Decomposed Function）と呼ぶ[10)]．運動方程式(14)はそのまま解いても良いが，物理的に見やすくするために，次のように，流れに沿ったLagrange形微分演算子

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial q_i(t)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial q_i} \tag{16}$$

を使って

$$\frac{dF(q,t)}{dt} = -\frac{1}{2}(\nabla\cdot v)F(q,t) + \frac{i\hbar}{2}\nabla^2 F(q,t) \tag{17}$$

と変形する．この運動方程式は，明らかに線形である．しかし，それを支える運動の台は，シュレディンガー方程式やWigner分布関数の運動方程式に比べれば，遥かに明瞭である．粒子の古典速度場が直接現れているからである．まず，式(17)には，ポテンシャル関数 $V(q)$ が現れないことに注意したい．それは，式(13)を使うことによって，波動関数が記述すべき「ダイナミクス」の部分が式(12)で分離されてしまったからである．従って，式(17)は量子力学に特有の「キネマティクス」だけを表していることになる．

式(17)の物理的意味は以下のようである．

(i) まず粒子が古典運動によって運ばれる流れの速度場 $v(q,t)$ が用意されていて，それに沿って $F(q,t)$ が運ばれていく．その速度場に，強い非線形性が反映されていれば，$F(q,t)$ は，その影響を受ける．仮に（悪い仮定だが），式(17)の右辺をゼロだとすると，

$$\frac{dF(q,t)}{dt} = 0 \tag{18}$$

となって，その解は

$$F(q(t),t) = F(q(0),0) \tag{19}$$

となり，古典リュウビル方程式の解，式(4)と全く同じ事情になる．つまり，背景となる流れの形だけによって，$F(q,t)$ は形を変えるということである．ただし，$F(q,t)$ は $\Gamma(q,p,t)$ とは異なり分布関数ではなく，式(18)の下では規格化されない（粒子数の保存がなされない）．

(ii) 次に，式(17)において，プランク定数が小さい

極限を想定して，$\frac{i\hbar}{2}\nabla^2 F(q,t)$ を無視して

$$\frac{dF(q,t)}{dt} = -\frac{1}{2}(\nabla\cdot v)F(q,t) \qquad (20)$$

と近似してみる．右辺の $\nabla\cdot v$ は，速度場の空間勾配であり，velocity gradient と呼んでいる．これは，群速度 $v(q,t)$ で進む波束 $\psi(q,t)$ が，その速度場の空間勾配によって形を変えようとする作用を表している量子効果である．この項の効果で，式 (19) では保証されなかった波動関数の規格化が，「流束（flux）の保存」という形で実現されることになる．このレベルまでの近似を半古典論と呼び，多体量子論を考える上で，極めて重要である（次節参照）．

ところで，流れの速度場 $v(q,t)$ に沿って，$\nabla\cdot v$ が発散する点が現れる．これは，式 (12) の変換が，q-空間上で一価であった作用面 $S_{cl}(q,t)$ が折り返し点に差し掛かったことを反映しており，次の一価の作用面へと式 (12) を接続していかなければならないことを意味している．私たちは，この点を，時間領域における折り返し点（turning point）と呼んでいる[11]．

(iii) 最後に，式 (17) に戻って，項 $\frac{i\hbar}{2}\nabla^2 F(q,t)$ まで考慮すれば，半古典論は厳密量子論に持ち上げられる．この項は拡散係数が純虚数を持つ拡散（量子的拡散）と解釈することができる．つまり，流れの場にそって，$F(q,t)$ が値や形を変えながら機械的に進んでいく中で，流線を乗り越えてあたかも拡散のように広がっていく運動を表している．実際，速度場が空間的に一様である場合には，ガウス関数形の $F(q,t)$ は，$\frac{i\hbar}{2}$ を拡散係数とするウイーナー過程として，ガウス関数の幅を広げていく．この「拡散」は，場所と時刻を問わず常に働き続けるが，特に，上で述べた turning point での $F(q,t)$ に起きる発散を回避させるために重要な役割を果たす．

よく知られているように，古典力学では，可積分性によるトーラスが破れていく過程にあって，相空間の中に無限小へと至る無限階層構造が出現してくる（Poincaré–Birkoff の不動点定理による）．当然，上の速度場 $v(q,t)$ においても，長時間ダイナミクスを丁寧に見ていけば，相空間の無限小構造が反映されてくるはずである．ところが，この量子拡散のお陰で，そのような超微細構造は平滑化されてしまい，プランクセルより小さい構造は見えなくなってしまう．これを quantum smoothing といい，量子力学的不確定性の運動学的な根拠を表している（quantum smoothing が実際にどのように進行するかを見るには，丁寧で深い研究が必要である）．

以上のようにして，量子波動方程式の線形性と非線形性を生み出すダイナミクスやキネマティクスが（ある程度）分かった．

4. 古典カオスのエネルギー量子化

次に，力学系における非線形現象の典型的現象であるカオスの量子力学的な振舞いを具体的に考えてみよう．上で述べたように，このような問題を取り扱う際には，半古典力学が適している．半古典力学とは，対象とする物理系のスケール（ここでは作用）が大きくなり，$\hbar$ が小さい極限において成り立つ，量子力学に対する近似理論のことである．逆に，古典論を出発点として，量子力学的構造の階層を遡りながら，量子効果を回復していく過程を調べることが，半古典力学の研究であると言ってもよい．

古典的にカオス的な振舞いをする系の，対応する量子系を調べることを「量子カオス」の定義として使う人もいる．古典カオスのエネルギー量子化とその物理的機構は，量子カオスの半古典力学的研究における，最も困難な問題の一つである．なぜならば，古典カオスは，WKB（Wentzel–Kramers–Brillouin）レベルの半古典近似そのものを台無しにするからである．具体的な例として，波束 $\phi(t)$ に対する自己相関関数の半古典表現の「初期値表示」を挙げよう．

$$\begin{aligned} C(t) &= \langle\phi(0)|\phi(t)\rangle \\ &= (2\pi i\hbar)^{-N/2}\int \phi^*(q_t)\phi(q_0)\left|\frac{\partial q_t}{\partial p_0}\right|^{1/2} \qquad (21) \\ &\quad\times \exp\left(\frac{i}{\hbar}S(q_t,q_0,t) - i\pi\frac{\lambda}{2}\right)dq_0\,dp_0. \end{aligned}$$

ここで，(q_0,p_0) と (q_t,p_t) は時刻 0 と t での $2N$ 次元相空間点であり，S と λ は，それぞれ，古典軌道に沿って計算される作用積分と，Maslov 指数と呼ばれる整数因子である．これを Fourier 変換することによって，量子化されたエネルギーを得ることができる．しかしながら，この式に現れる振幅因子 $|\partial q_t/\partial p_0|^{1/2}$ のせいで，自己相関関数はある誘導時間を越えると指数関数的に増大し，数値計算が無意味なものになってしまう（図 1）．

状態密度に対する半古典表現である，Gutzwiller の跡公式は，原始的な WKB 近似の表現を出発点とする美しく明快な理論として有名である[12]．この理論は量子カオスの研究において中心的な重要性を持ち，特に，古典周期軌道が量子化に寄与するという事実は，古典

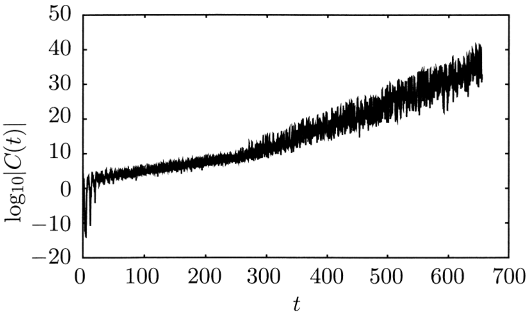


図 1　カオス系において，式 (21) を用いて計算された自己相関関数．ある時刻を過ぎると，指数関数的な増大が見られる（文献 14, 15) より改変して転載）．

カオスの幾何学に対する，この跡公式の重要性を際立たせている．しかし，跡公式は，周期軌道展開がしばしば絶対収束しないなど，特に多次元系に対して，適用が非常に困難であることに変わりはない．

一方で，古典的に可積分な系に対する量子化条件（Einstein–Brillouin–Keller 量子化条件）は，WKB 波動関数の位相部分の情報のみを用いるという事実がある．可積分とカオスの間には，確かに軌道運動の振舞いには大きな違いがあるが，エネルギーの量子化において，両者を区別する必然性はどこにもない．つまり，ごく自然に，以下のような問いが生じる：振幅因子が発散を示さないような，WKB を越える高次の正確な半古典理論が存在したとして，可積分の場合と同様にして，位相因子のみを用いてカオスを量子化することができるか，あるいは，そもそも振幅因子はエネルギーの量子化において本当に必要であるか．

カオスが位相因子のみを用いて量子化され得ることは，多くの数値計算によって確認されている[13)]．私たちは，これらの蓄積された結果を土台として，半古典領域におけるエネルギー量子化が，実際に位相の建設的ならびに破壊的干渉のみを用いて実行されることを示した[14, 15)]．WKB を越えた半古典理論において，「厳密な」振幅因子が利用可能であったとしても，この振幅が相対的に激しく振動しない場合には，半古典振幅因子の役割は無視できるほど小さいということが明らかになった．

以下に私たちが構築した，エネルギー量子化の手法を紹介する．この手法は，前節で紹介した ADF の理論に基づいており，ここでは関数 $F(q,t)$ に対する運動方程式 (14) を出発点とする．$\frac{i\hbar}{2}\nabla^2 F(q,t)$ を無視して運動方程式を解き，最終的に，原始的な WKB 近似と同じ範疇に入る半古典波動関数を得ることができる．

$$\Psi_{p_0}(q,t) = \int \delta(q - q_t(q_0,p_0))F(q_0,0)\left|\frac{\partial q_t}{\partial q_0}\right|_{p_0}^{1/2}$$
$$\times\ \exp\left[\frac{i}{\hbar}S_2(q_t,p_0,t) - \frac{i\pi}{2}M\right]dq_0. \qquad (22)$$

ここで S_2 は，Goldstein の古典力学の教科書における F_2 型の生成母関数，M は関連する Maslov 指数である．この近似波動関数は，固定された初期運動量 p_0 によってラベルされることに注意する．ADF を用いて構築される相関関数は，次式のようになる．

$$C^{\mathrm{ADF}}(t) = \langle\Psi_{p_0}(0)|\Psi_{p_0}(t)\rangle$$
$$= \int F^*(q_t)F(q_0)\left|\frac{\partial q_t}{\partial q_0}\right|^{1/2} \qquad (23)$$
$$\times \exp\left[\frac{i}{\hbar}S_2(q_t,p_0,t) - \frac{i\pi}{2}M - \frac{i}{\hbar}p_0q_t\right]dq_0.$$

式 (21) の相関関数と比較すると，C^{ADF} は運動量空間にわたる積分を必要としない．これは数値計算において運動量のサンプリングが必要ないことを意味し，かなりの利点であるが，発散する振幅因子 $|\partial q_t/\partial q_0|^{1/2}$ は残ったままである．結果として，カオス系への適用においては，図 1 と同様な時間変化を示すことになる．図 1 の大域的な特徴をよく見ると，指数関数的に増大する曲線に振動成分が重ね合わされていることがわかる．この振動的特徴を，C^{ADF} 全体を Fourier 変換する前に，何らかの方法で引き出さなければならないことが示唆される．そこで，C^{ADF} の指数関数的増大が振幅因子 $|\partial q_t/\partial q_0|^{1/2}$ によって引き起こされていることを認識して，振幅因子を除去し，次式を得る；

$$\tilde{C}_{\mathrm{III}}^{p_0}(t) \equiv \int F^*(q_t)F(q_0) \qquad (24)$$
$$\times\ \exp\left[\frac{i}{\hbar}S_2(q_t,p_0,t) - \frac{i\pi}{2}M - \frac{i}{\hbar}p_0q_t\right]dq_0.$$

半古典的な位相の情報（振動部分）のみが引き出されていることが分かる．この相関関数を AFC-III（Amplitude-Free Correlation function, type III）と呼び，位相の情報のみを用いて行われるエネルギー量子化を，位相量子化と呼ぶことにする．上式における関数 F を，空間に局在した関数（例えば Gauss 関数）であるように選べば，q_0 にわたる積分に対する停留位相条件から，$q_t \simeq q_0$ かつ $p_t \simeq p_0$ を満足する「近周期軌道」が，相関関数に著しい寄与をするものとして自動的に選別されることが分かる．

相関関数 (24) の形からは，数値計算において厄介な振幅因子を除去しただけのように見えるかも知れない．しかしながら，時間相関関数における位相干渉の Fourier 解析により，周期軌道条件を仮定し，建設的

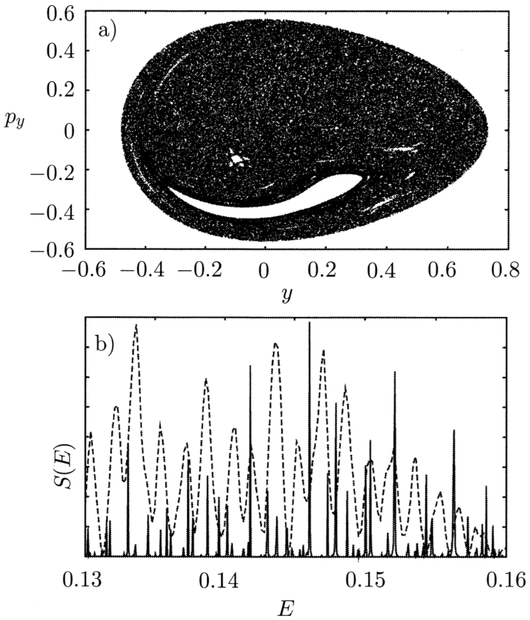


図2 a) 修正 Hénon–Heiles 系の $E_{cl} \simeq 0.157$ でのポアンカレ面．b) 図 1 の相関関数を Fourier 変換して得られるエネルギースペクトルを破線で示す．量子波束から計算されるスペクトル（実線）との一致は悪い（文献 14, 15) より改変して転載）．

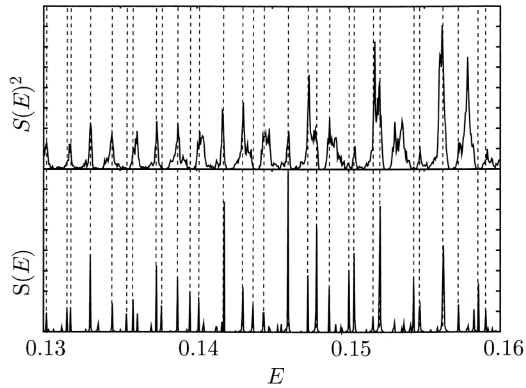


図3 AFC-III を用いた位相量子化によるエネルギースペクトル（上段）．量子波束の時間発展から得られたエネルギースペクトル（下段）と比較すると，ピーク位置が非常に良く再現されていることが確認される（文献 14, 15) より改変して転載）．

干渉と破壊的干渉の役割を明らかにすることによって，エネルギースペクトルの半古典位相量子化の機構を示すことができる[15]．エネルギー量子化に関する限り，古典ダイナミクスの可積分性と非可積分性（カオス）の間には本質的な差はないのである．こうして，アインシュタインの 1917 年の設問「カオスはどのようにして量子化されるか？」は，少なくとも部分的には解明された．興味のある方は論文を参照してほしい[15]．

次に，AFC-III を用いた位相量子化を，数値的に調べてみよう．AFC-III のスペクトル位置を，量子的な波束伝播によって得られたエネルギースペクトルの位置と比較する．振幅因子が除去されているので，スペクトルピークの高さの比較に意味はないことに注意されたい．用いる Hamiltonian は，

$$H(x,y,p_x,p_y) = \frac{p_x^2}{2m_x} + \frac{p_y^2}{2m_y} + \frac{x^2+y^2}{2}$$
$$+\ x^2(0.6y^2+y) + \frac{1}{3}y^3(0.2y-1) + 0.1x \qquad (25)$$

である．これは，よく知られている Hénon–Heiles ポテンシャルを，量子波束が山を越えて逃げないように修正したものである．ここで $m_x = 1.0087$ ならびに $m_y = 1.0$ とし，プランク定数は $\hbar = 0.005$ とする．図 2 a) のポアンカレ断面に示されているように，エネルギー $E_{\rm cl} \simeq 0.157$ 付近に中心を持つように準備された古典軌道は，強いカオス領域にある．この強いカオスを反映して，振幅因子を伴う相関関数は時間とともに指数関数的に増大し（図 1），これから得られるエネルギースペクトルは，幅の広い，量子計算の結果からはほど遠いものになる（図 2 b)）．図 3 に，AFC-III による位相量子化のエネルギースペクトルを示す．ピークを明瞭にするために AFC-III スペクトルは 2 乗されているが，ピーク位置自体はもちろんシフトされていない．正しい量子化エネルギーを非常に良く再現していることが確認される．古典軌道をサンプルする空間が若干異なるものの，軌道の本数を同じ（ともに 10,000 本）にして計算された図 2 b) の結果と比較すると，位相量子化の性能の高さは明らかである．

位相量子化の $\hbar$ 依存性を調べるために，単純に，$\hbar$ の値を 0.05 ならびに 0.5 と大きい値にする．AFC-III を用いた位相量子化の結果を，図 4 に示す．再び，ピーク位置のみに注目してほしい．$\hbar = 0.05$ の場合（図 4 a)），ほぼすべてのエネルギー準位は，位相量子化によって正確に再現されている．一方，$\hbar = 0.5$ の場合には（図 4 b)），AFC-III のピークの，量子的な結果からのずれが，大きいことが観察される．しかし，量子的なピーク位置と AFC-III によるピーク位置の間に明確な対応が残っている．この数値結果は，$\hbar$ が大きく，調べている古典系が強いカオスを示す場合には，正しい振幅因子を考慮する必要があるということを，明確に示している．

以上のように，半古典領域におけるエネルギー量子

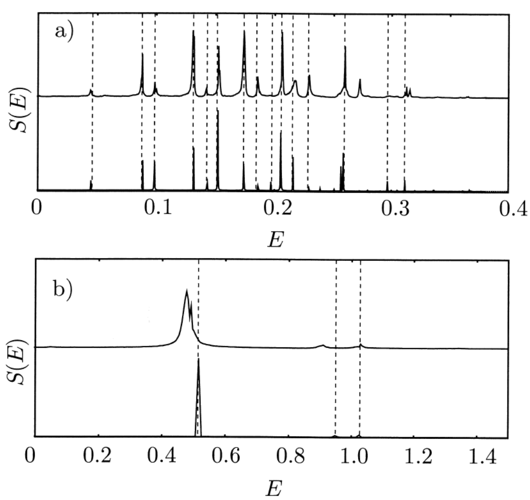


図 4 量子波束と位相量子化から得られるエネルギースペクトルの比較．プランク定数の値は，a) $\hbar = 0.05$，b) $\hbar = 0.5$ である．相関関数の計算に用いられた古典軌道は 10,000 本である．a) 位相量子化によるスペクトル（上段）のピーク位置は，量子波束の結果（下段）と良く一致する．b) 位相量子化によるスペクトル（上段）のピーク位置は，量子波束の結果（下段）から少しずれる（文献 15) より改変して転載）．

化に関しては，古典系がカオスであっても位相因子のみを用いて実行されることが，理論的ならびに数値的に示された．しかしながら，もちろん，半古典力学に現れる振幅因子がいつも不要であるということではない．波動関数の大きさに直接関係づけられる量を調べるときには，半古典領域においても，振幅因子が決定的な役割を果たすと考えられる．また，図 4 a) の $\hbar = 0.05$ における比較をよく見ると分かるように，量子波束計算からは得られるが，半古典計算では再現されないエネルギー固有値が存在する可能性がある．これを解明するには，通常の WKB 理論を越える半古典手法が必要であり，それは私たちが現在取り組んでいるテーマである．

5. 結語

量子論と非線形現象の関わりについて，2 つの視点から議論した．一つは，2 つ以上の部分系の相互作用から立ち現れる非線形性とその量子論的特長であり，もう一つは，背景となる古典ダイナミクスが量子論にどのように影響するか，という観点からであった．いずれにしても，量子論は非線形現象を記述する能力を持っているだけではなく，量子論であるからこそ現れる非線形現象，あるいは，非線形現象における量子効果というものが確かにあるのであって，今後の研究を通して，さらに明らかにされていくことであろう．

参考文献

1) H. Mori: *Phys. Lett.* **9**, 136 (1964); H. Mori: *Prog. Theor. Phys.* **33**, 423 (1965); H. Mori: *Prog. Theor. Phys.* **34**, 399 (1965).
2) R. Zwanzig: *J. Chem. Phys.* **33**, 1338 (1960); R. Zwanzig: *Phys. Rev.* **124**, 983 (1961).
3) P.-O. Löwdin: *J. Math. Phys.* **3**, 969 (1962).
4) H. Feshbach: *Ann. Phys. (N.Y.)* **5**, 357 (1958).
5) A. Szabo, and N.S. Ostlund: *Modern Quantum Chemistry: Introduction to Advanced Electronic Structure Theory* (McGraw-Hill, New York, 1989); A・ザボ，N・S・オストランド著，大野公男，阪井健男，望月祐志訳：『新しい量子化学―電子構造の理論入門』，東京大学出版会（1987）．
6) D. Bohm: *Phys. Rev.* **85**, 166 (1952); D. Bohm: *Phys. Rev.* **85**, 180 (1952).
7) R.E. Wyatt: *Quantum Dynamics with Trajectories* (Springer, New York, 2005).
8) T. Yonehara and K. Takatsuka: *J. Chem. Phys.* **129**, 134109 (2008); K. Takatsuka and T. Yonehara: *Phys. Chem. Chem. Phys.* **13**, 4987 (2011).
9) E. Wigner: *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932).
10) K. Takatsuka and A. Inoue: *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1404 (1997); A. Inoue-Ushiyama and K. Takatsuka: *Phys. Rev. A* **59**, 3256 (1999).
11) S. Takahashi and K. Takatsuka, 投稿準備中.
12) M.C. Gutzwiller: *J. Math. Phys.* **11**, 1791 (1970); **12**, 343 (1971); M.C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (Springer, Berlin, 1990).
13) 高塚和夫：『非平衡系の科学 IV』，講談社 (2001); K. Takatsuka: *Phys. Rev. E* **64**, 016224 (2001); K. Hotta and K. Takatsuka: *J. Phys. A* **36**, 4785 (2003); S. Takahashi and K. Takatsuka: *Phys. Rev. A* **70**, 052103 (2004); K. Hotta and K. Takatsuka: *J. Chem. Phys.* **122**, 174108 (2005); S. Takahashi and K. Takatsuka: *J. Chem. Phys.* **124**, 144101 (2006); H. Teramoto and K. Takatsuka: *J. Chem. Phys.* **125**, 194301 (2006); T. Yamashita and K. Takatsuka: *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **161**, 56 (2007).
14) K. Takatsuka, S. Takahashi, K.Y.W. Patrick, and T. Yamashita: *J. Chem. Phys.* **126**, 021104 (2007).
15) H. Ushiyama and K. Takatsuka, *J. Chem. Phys.* **122**, 224112 (2005); S. Takahashi and K. Takatsuka: *J. Chem. Phys.* **127**, 084112 (2007).

（たかつか・かずお，東京大学大学院総合文化研究科）
（たかはし・さとし，東京大学大学院総合文化研究科）

有理写像と最尤推定復号

平 岡　裕 章

1. 誤り訂正符号

現在の情報通信システムの基盤となる数学はシャノンによって築かれ[6]，その後情報理論として整備が進むことになる．符号理論はその中の一分野であり工学・情報科学・統計物理・数学等の様々な分野の融合領域として目覚ましい深化を繰り広げている．そこでのダイナミックな理論展開は成書[1,3,5]にゆずり，本稿では少し異なる視点から誤り訂正符号について考えてみたい．

符号理論では，情報源となる送信者から雑音がある通信路を介してつながっている受信者へ，いかに高信頼かつ高効率な情報伝送を行うか，ということを基本的な問題として考える．対象となる通信システムは図 1 で表される．ここで m は送信者が送るメッセージであり通常はある有限体 $\mathbb{F}$ 上のベクトル $m=(m_1\cdots m_k)\in\mathbb{F}^k$ で表現される．これらのメッセージの集まりを

$$M=\{m\in\mathbb{F}^k:\ m\text{ は送信メッセージ}\}$$

と表す．なお本稿では簡単のため $\mathbb{F}=\mathbb{F}_2=\{0,1\}$ として以下説明を行う．

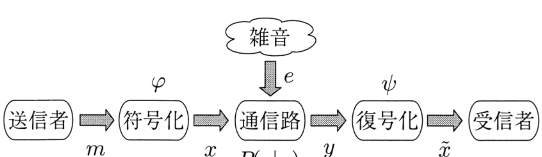


図 1　通信システム．

さて k ビットのメッセージ m は雑音状況下で受信者に送られる．よって m を通信路への入力信号にそのまま用いると，雑音の影響によるビット反転に伴い，もとのメッセージが受信者へ正確に伝送できなくなる恐れがある．そこで送信側で**符号化**という操作が必要になってくる．数学的には符号化 φ は M から n 次元ベクトル空間（ここで $k<n$）への単射 $\varphi: M\to\mathbb{F}^n$ として表現される．つまり冗長度を持たせたビット列 $x=\varphi(m)$ を通信路に送ることで雑音に対する耐性を持たせるのである．ここで各メッセージ m に対する $x=\varphi(m)$ を符号語とよぶ．単射にする意味は符号語からメッセージを一意に復元する必要性から明らかであろう．

このように変換されたビット列 x が通信路に入力されるが，受信側には一般に誤り $e\in\mathbb{F}^n$ が加えられた受信語 $y=x+e$ が送られてくる．そこで受信側では受信語 y から送信符号語 x を推定する必要がある．この操作のことを**復号化**とよび数学的には $\psi:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n$ なる写像で表される．このとき推定語 $\tilde{x}=\psi(y)$ と送信符号語 x の一致／不一致により伝送成功／失敗が決まる．実際には受信者は送信メッセージ m を欲しているが，φ の単射性から符号語の推定問題として定式化しても問題はない．この符号化と復号化の対 (φ,ψ) のことを誤り訂正符号とよぶ．

最後に通信路およびその上で発生する雑音であるが，これらは条件付き確率として数学的に取り扱われる．すなわち各送信符号語 x を送った条件

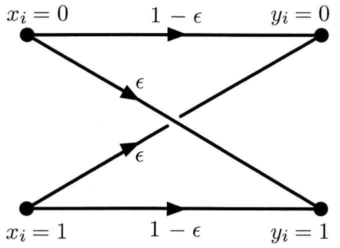


図 2　2 元対称通信路.

で受信語 y を得る確率 $P_{Y|X}(y|x)$ を指定することで通信路とその上の雑音を表現することになる．光ファイバー（有線通信）や大気（無線通信）といった現実の通信路に応じてその数学的モデルを $P_{Y|X}(y|x)$ として表現することになるが，実用性と数学解析との相性の観点から幾つかの代表的な通信路モデルがよく調べられている．本稿で以後取り扱う 2 元対称通信路はその中の一つであり，各ビット単位でその条件付き確率 $P_{Y_i|X_i}(y_i|x_i)$ は

$$P_{Y_i|X_i}(y_i|x_i) = \begin{cases} \epsilon, & x_i + y_i = 1 \\ 1-\epsilon, & x_i + y_i = 0 \end{cases} \quad (1)$$

で (図 2 も参照)，ビット列 $x, y \in \mathbb{F}^n$ に対しては独立性を仮定して $P_{Y|X}(y|x) = \prod_{i=1}^{n} P_{Y_i|X_i}(y_i|x_i)$ で定められる．ここで ϵ は $0 \leq \epsilon \leq 1/2$ としておく．

2. シャノン限界

符号理論には「信頼性」と「効率」という 2 つの大切な評価基準が存在する．例えばメッセージ長を $k = 1$ とし各メッセージ $m \in \mathbb{F}$ を n 回繰り返したビット列を符号語に採用し，受信側では 0 と 1 の多数決により復号ルールを定めたとしよう．この場合 n を十分大きくとることで「信頼性」は高まるであろうが「効率」という観点からは無駄な冗長度が入り込むことになる．そこで与えられた誤り訂正符号 (φ, ψ) に対してこれらの評価基準の定量的指標として，符号化率 $R := k/n$ および誤り率

$$P_e := \sum_{x \in \mathcal{C}, y \in \mathbb{F}^n} P_X(x) P_{Y|X}(y|x)(1 - \delta_{x,\psi(y)})$$

を導入する[*1]．ここで $P_X(x)$ は符号語 x の発生確率，$\mathcal{C} := \varphi(M)$ はすべての符号語の集まりである．

一見トレードオフの関係に見えるこの両者が共存できる限界値を示す定理がシャノンによる通信路符号化定理である：

定理 1[*2]　各 ϵ に対して定数 $0 \leq C(\epsilon) \leq 1$ が存在し次が成り立つ：

1. $R < C(\epsilon)$ ならば誤り訂正符号の列

$$\{(\varphi_n, \psi_n) : 符号長\, n, メッセージ数\, \lceil 2^{nR} \rceil\}$$

が存在して誤り率を $P_e^{(n)} \to 0 (n \to \infty)$ とできる．ここで $P_e^{(n)}$ は (φ_n, ψ_n) についての誤り率である[*3]．

2. $R > C(\epsilon)$ ならば 1 のような列は存在しない．

ここで定数 $C(\epsilon)$ はシャノン限界（通信路容量）とよばれる．

これにより符号化率 R がシャノン限界より小さければ，誤り率を 0 に漸近させることが可能なことが「存在定理」という形で解決された．ただしこれが符号理論の幕開けとなる．

問題 1　定理 1 の 1 を達成する実用的な誤り訂正符号を実現できるか？

3. 線形符号

さてここで少し話題をかえて**線形符号**についての基本的な事柄をまとめておく．線形符号とは符号化 φ が線形写像 $\varphi : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^n$ で与えられる符号のクラスであり，容易に実装できる長所も相まって盛んに研究が行われている．本稿でも線形符号のみを今後考察する．

符号化 φ を $k \times n$ 行列 G（各成分は $\mathbb{F}$ の元）で表すと，すべての符号語の集まり $\mathcal{C}$ は

*1)　$\delta_{a,b}$ はクロネッカーのデルタ.
*2)　より一般的な設定については文献 1, 6) を参照.
*3)　$\lceil a \rceil$ は a 以上の最小整数，$\lfloor a \rfloor$ は a 以下の最大整数.

$$\mathcal{C}=\{(x_1\cdots x_n)=(m_1\cdots m_k)G\ |m_i\in\mathbb{F}\}\quad (2)$$

となる．一方 $\mathcal{C}$ は $\mathbb{F}^n$ の部分空間 ImG であるから

$$\mathcal{C}=\{(x_1\cdots x_n)\mid H(x_1\cdots x_n)^T=0\}\quad (3)$$

とも表せる[*4]．ここで H は $m\times n$ 行列，$m=n-k$，であり H の m 個の行ベクトルは G の行ベクトル部分空間の直交補空間の基底として選べる．すなわち G もしくは H を与えることで線形符号化を指定することができる．ここに出てきた G, H はそれぞれ**生成行列**，**パリティ検査行列**とよばれる．

符号化の性能を評価する指針の一つに**最小距離**がある．符号語の集まり $\mathcal{C}$ に対してその最小距離は

$$d(\mathcal{C})=\min\{d(x,y)\mid x,y\in\mathcal{C},\ x\neq y\}$$

で定められる．ここで $d(x,y)$ は $x,y\in\mathbb{F}^n$ のハミング距離 $d(x,y):=|\{i\mid x_i\neq y_i\}|$ である[*5]．線形符号の場合は符号語に対する線形性から

$$d(\mathcal{C})=\min\{d(x,0)\mid 0\neq x\in\mathcal{C}\}$$

とも表せる．またパリティ検査行列の性質 (3) から次が従う：

補題 2 パリティ検査行列 H が定める符号語の集まり $\mathcal{C}$ について以下の条件は同値である：

1. $d(\mathcal{C})=d$.
2. H の一次従属な d 個の異なる列ベクトルの組は存在するが，すべての $d-1$ 個の異なる列ベクトルの組は一次独立．

ここで最小距離 $d=d(\mathcal{C})$ と線形符号の性能の関係を見てみよう．まず $x\in\mathbb{F}^n$ を中心とする半径 $r\in\mathbb{N}$ の球を $B(x,r):=\{y\in\mathbb{F}^n\mid d(x,y)\leq r\}$ で定める．このとき半径 $t=\lfloor(d-1)/2\rfloor$[*3] の球をすべての $\mathcal{C}$ 内の符号語に配置させると，最小距離の定義から異なる $x,x'\in\mathcal{C}$ について $B(x,t)\cap B(x',t)=\emptyset$ となる．そこで各受信語 y に対して $\tilde{x}\in\mathcal{C}$ を割り当てる次の復号法

$$\psi(y)=\tilde{x}\ \ s.t.\ d(\tilde{x},y)=\min\{d(x,y)\mid x\in\mathcal{C}\}$$

を採用すると[*6]，誤り $e\in\mathbb{F}^n$ の重み $d(e,0)$ が t 以下ならば受信語 y を含む球が一意に定まり，送信符号語を正確に復元できる．よって最小距離 d が大きい符号化ほど雑音に対する耐性は強くなる．これより補題 2 から，列ベクトルの一次独立性が十分高いパリティ検査行列を構成することが，線形符号の一つの設計指針として挙げられる．実際に組合せ論や代数幾何を用いた代数的符号理論はこの方向性の発展に大きな影響を与えている[3]．

4. 最尤推定復号

3 節では符号化の重要なクラスである線形符号を扱ったが，ここでは**最尤推定復号**[*7] とよばれる復号法について解説を行う．1 節で説明したが通信路は条件付き確率 $P_{Y|X}(y|x)=\prod_{i=1}^n P_{Y_i|X_i}(y_i|x_i)$ で定められていた．最尤推定復号 ψ_{ML} とは受信語 $y\in\mathbb{F}^n$ に対して各ビットごとに次のルールで推定語 $\psi_{ML}(y)=(\tilde{x}_1\cdots\tilde{x}_n)$ を割り当てる復号法である：

$$\tilde{x}_i:=\begin{cases}1, & \displaystyle\sum_{\substack{x\in\mathcal{C}\\ x_i=0}}P_{Y|X}(y|x)\leq\sum_{\substack{x\in\mathcal{C}\\ x_i=1}}P_{Y|X}(y|x)\\ 0, & \text{その他}\end{cases}. \quad (4)$$

一般に誤り訂正符号 (φ,ψ) が与えられたとき i 番目のビットについての誤り率

$$P_e^{(i)}:=\sum_{x\in\mathcal{C},y\in\mathbb{F}^n}P_X(x)P_{Y|X}(y|x)(1-\delta_{x_i,\psi_i(y)})$$

を考察してみる．ここで $\psi_i(y)$ は受信語 y についての i ビット目の推定を表す．$P_X(x)P_{Y|X}(y|x)=P_{X,Y}(x,y)$ と全事象の確率は 1 であることに

*4) x^T は x の転置．

*5) 有限集合 A に対して $|A|$ は A の要素数．

*6) $\tilde{x}$ が複数存在する場合は，例えば「復号失敗」と判定．

*7) 英語は Maximum Likelihood Decoding．また正確にはここで扱う復号法はビット単位最尤推定復号とよばれる．

注意すると，例えば符号語の確率分布 $P_X(x)$ が一様分布（$P_X(x) = 1/2^k$）の場合

$$P_e^{(i)} = 1 - \frac{1}{2^k} \sum_{y \in \mathbb{F}^n} \sum_{x \in \mathcal{C}, x_i = \psi_i(y)} P_{Y|X}(y|x)$$

となる．よって各受信語 y ごとに $\psi_i(y) \in \{0,1\}$ を $\sum_{x \in \mathcal{C}, x_i = \psi_i(y)} P_{Y|X}(y|x)$ の大きいほうに選べばビット誤り率を最小にできるが，これは $\psi_{ML}(y)$ に他ならない．つまり最尤推定復号は常にビット誤り率最小を実現する優れた復号法なのである．

そこで問題 1 に取りかかる戦略として，まず復号法は最尤推定復号に固定しその中でよい符号化のクラスを探せば良いと思うかもしれない．しかしここには重大な問題がある．最尤推定復号 (4) を実行するには $|\mathcal{C}| = 2^k$ 個のたし算，つまり指数的な計算量が必要となり，これは問題 1 内の「実用的な」という条件に反する．

そこで問題 1 の解決へ向けて以下の予備的考察を考える：

> **問題 2**　最尤推定復号 (4) を低演算量かつ高精度に近似することは可能か？

この問題と同様の意識の下で開発された高性能な誤り訂正符号として，LDPC 符号やターボ符号[5)]が近年盛んに研究されている．しかしながら本稿ではこれらの研究とは異なる角度から問題 2 を考察してみよう．

5. 最尤推定有理写像

さて前節までで基本的な符号理論の説明が終わった．ここからは問題 2（さらに問題 1）へ向けた著者らの最近の試みを紹介する．証明を含む詳細は文献 2) を参照されたい．目標は最尤推定復号の非線形性を制御する代数構造を解き明かし，それを近似化のプロセスに応用することである．具体的な戦略は以下で与えられる：

1. 最尤推定復号 (4) を有理写像として表現．
2. 有理写像の骨格（不動点や安定性）を調べる．
3. 2 の情報から近似最尤推定復号を構成する．

以下各小節ごとにそれぞれの解説を行う．

5.1 有理写像表現

まず符号化を一つ固定しその符号語の集まりをこれまで同様 $\mathcal{C}$ で表す．ここでメッセージ長は k，符号長は n とする（すなわち生成行列 G のサイズは $k \times n$）．各符号語 $x \in \mathcal{C}$ に対して以下の n 変数多項式を用意しよう：

$$F_x(u) = F_x(u_1, \cdots, u_n) := \prod_{i=1}^{n} \rho_{x_i}(u_i).$$

ここで

$$\rho_{x_i}(u_i) = \begin{cases} u_i, & x_i = 1 \\ 1 - u_i, & x_i = 0 \end{cases}$$

で与えられる．多項式 $F_x(u)$ を符号語 $x \in \mathcal{C}$ の**符号語多項式**とよぶ*8)．例えば $x = (0110) \in \mathbb{F}^4$ なる符号語があった場合にはその符号語多項式は $F_x(u) = (1 - u_1)u_2u_3(1 - u_4)$ となる．

実数上の区間 $I = [0,1]$ の n 個の直積を I^n で表す．ここで導入した符号語多項式を用いて I^n 上で次の**有理写像** $f : I^n \to I^n$ を考察する：

$$\begin{aligned} & f : (u_1, \cdots, u_n)^T \mapsto (u'_1, \cdots, u'_n)^T, \\ & u'_i = f_i(u) := \frac{\sum_{x \in \mathcal{C}, x_i = 1} F_x(u)}{H(u)}, \quad i = 1, \cdots, n, \\ & H(u) := \sum_{x \in \mathcal{C}} F_x(u). \end{aligned} \tag{5}$$

ここで $f : I^n \to I^n$ となっていることは，符号語多項式が I^n 上で $0 \leq F_x(u) \leq 1$ を満たすことから確かめられる．この有理写像が最尤推定復号の同値表現を与えることを見てみよう．そのために各受信語 $y \in \mathbb{F}^n$ に I^n 内の点 $u^0(y) = (u_1^0, \cdots, u_n^0)$ を

$$u_i^0 = \begin{cases} \epsilon, & y_i = 0 \\ 1 - \epsilon, & y_i = 1 \end{cases}, \quad i = 1, \cdots, n \tag{6}$$

で対応させる．ここで ϵ は (1) のビット反転確率である．このとき以下の補題が成立する：

*8)　巡回符号の多項式表現とは異なる概念であることを念のため注意しておく．

補題 3　1.　$P_{Y|X}(y|x) = F_x(u^0(y))$.

2.　最尤推定復号 (4) は以下の復号法と同値

$$\psi : \mathbb{F}^n \ni y \mapsto \tilde{x} \in \mathbb{F}^n,$$

$$\tilde{x}_i := \begin{cases} 1, & f_i(u^0(y)) \geq 1/2 \\ 0, & f_i(u^0(y)) < 1/2 \end{cases}, \; i = 1, \cdots, n.$$

この補題により最尤推定復号 (4) を有理写像 (5) を経由して調べることが可能となる．

5.2 有理写像の骨格

次に有理写像 (5) を力学系的視点から調べてみよう．力学系についての基礎は例えば文献 4) を参照されたい．

まずはじめに I^n の「カド」に位置する集合 $(\partial I)^n = \{0,1\}^n$ を調べる[*9)]．このとき自然な埋め込み $\mathbb{F} = \{0,1\} \hookrightarrow I = [0,1]$ の下で $\mathbb{F}^n$ の点を I^n の点としてみなすと，

$$(\partial I)^n = \mathcal{C} \cup ((\partial I)^n \setminus \mathcal{C})$$

という直和分解が得られる．ここで直和の第 2 項は非符号語の集まりである．次の 2 つの命題は各直和成分上での有理写像の性質を述べている：

命題 4　$u \in (\partial I)^n$ が有理写像 (5) の不動点である必要十分条件は $u \in \mathcal{C}$ である．さらにこれらの不動点は安定不動点である．

命題 5　S を有理写像の不確定点[*10)]の集まりとすると，$(\partial I)^n \setminus \mathcal{C} \subset S$.

ここで補題 3 の対応の下で命題 4 の復号としての意味を考えてみよう．各受信語 y に対して (6) によって $u^0(y)$ が定まるが，この $u^0(y)$ から最も近い $(\partial I)^n$ の点は y 自身であることに注意しよう．このとき受信語 y が符号語 $y \in \mathcal{C}$ でかつビット反転確率 ϵ が小さいときには，命題 4 から $u^0(y)$ の像 $f(u^0(y))$ は y の近くにうつされることになる．すなわちビット反転が起こりにくい状況で符号語が受信語となる場合には，最尤推定復号の手続き（補題 3）では，その受信語にエラーは発生していないと判断するわけである．これは自然な対応であろう．

次に命題 5 の復号としての意味であるが，ここでは以下の連続勾配系との対応を通じて考察してみる．簡単な計算から有理写像 (5) は

$$u'_i = u_i + u_i(1-u_i)\frac{\partial}{\partial u_i}(\log H(u)), \;\; i = 1, \cdots, n$$

と変形できることが確かめられる．すなわち内部 $(0,1)^n$ では有理写像 (5) の不動点は連続勾配系 $du/dt = \nabla(\log H(u))$ の不動点と一致し，u での移動方向ベクトル $u' - u$ と勾配 $\nabla(\log H(u))$ の各成分の符号は一致する．ここで勾配の第 i 成分は，$F_x^{(i)}(u) := \prod_{k=1, k\neq i}^{n} \rho_{x_k}(u_k)$ として

$$\nabla(\log H(u))_i = \frac{\sum_{\substack{x \in \mathcal{C} \\ x_i = 1}} F_x^{(i)}(u) - \sum_{\substack{x \in \mathcal{C} \\ x_i = 0}} F_x^{(i)}(u)}{H(u)} \tag{7}$$

で与えられる．補題 3 と同様に $F_x^{(i)}(u^0(y))$ は i ビット目をのぞいた残りのビットに対する条件付き確率となることから，式 (7) の分子は $x_i = 1$ となる尤度の和 $\sum_{\substack{x \in \mathcal{C} \\ x_i = 1}} F_x^{(i)}(u)$ と $x_i = 0$ となる尤度の和 $\sum_{\substack{x \in \mathcal{C} \\ x_i = 0}} F_x^{(i)}(u)$ を比較していることになる．よって受信語 y が非符号語の場合は命題 5 により y で有理写像は定義されないが，対応する $u^0(y)$ での勾配ベクトル成分 (7) に応じて各ビットごとに 0 もしくは 1 への復号が尤度の比較を用いて行われることになる．

さてこれまでの議論を通じて有理写像が定義されている空間 I^n の各直積成分 $I = [0,1]$ は確率や尤度といった意味合いを持つことがわかってきた．では I^n 内の中心の点 $p := (1/2, \cdots, 1/2)^T \in I^n$ は復号としての特別な役割を果たしているだろうか？ 補題 3 より 1/2 はビット判定の閾値となっていることから何らかの性質が含まれていることが期待される．まず次が成立する：

命題 6　p は有理写像 (5) の不動点である．また生成行列の列ベクトル表示を $G = (g_1 \cdots g_n)$ とすると，p での有理写像のヤコビ行列 $J =$

*9)　集合 A に対して ∂A は A の境界．

*10)　有理写像 (5) のある i 番目の成分で分母 = 分子 = 0 となる点 u を不確定点とよぶ．

$(J_{ij})_{1\le i,j\le n}$ は

$$J_{ij}=\begin{cases}1, & g_i=g_j\\ 0, & g_i\neq g_j\end{cases},i,j=1,\cdots,n \quad (8)$$

で与えられる．

この命題により生成行列 G の列ベクトルの一次独立性が，不動点 p 周りでの有理写像の線形近似を定めていることがわかる．ここで G の列ベクトルに同じものが存在する場合（すなわちヤコビ行列が単位行列でない）を考えてみよう．あらかじめ適当なビット置換を $\mathbb{F}^n$ に施すことで $g_1=\cdots=g_r, 1<r\le n, g_i\neq g_1(i>r)$, としておく．このときヤコビ行列 J の対応するブロック行列 $J_r:=(J_{ij})_{1\le i,j\le r}$ はすべての成分が 1 となることから，J_r は r と 0（$r-1$ 次の重複）を固有値としてもつ．また r に対応する不安定固有ベクトルは $(1,\cdots,1)^T\in\mathbb{R}^r$, 0 に対応する安定固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^r$$

で与えられる．すなわち不安定固有ベクトルは $(u_1,\cdots,u_r)$ のすべての成分値を同時に増加／減少させ，結果として（補題3から）推定語 $(\tilde{x}_1\cdots\tilde{x}_r)$ のすべてのビットをそろえる．一方安定固有ベクトルは $(u_1,\cdots,u_r)$ の各成分をずらすため，推定語 $(\tilde{x}_1\cdots\tilde{x}_r)$ の各ビットを異なるものにする役割をもつ．

ここで $g_1=\cdots=g_r, 1<r\le n$, を仮定していることから $\mathbb{F}^r$ のビット列に対して $(0\cdots0)$, $(1\cdots1)$ は $\mathcal{C}$ の符号語の部分列として存在し，それ以外のビット列は $\mathcal{C}$ の符号語には現れない（式 (2) を参照）．すなわち不安定部分空間は I^r 上では「符号語の方向」を向いており，安定部分空間は「非符号語の方向」を向いていることになる（図 3 参照）．このように p の近傍での復号は安定部分空間と不安定部分空間の性質を用いて推定が行われている．

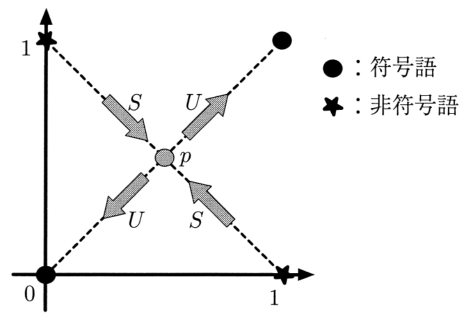


図 3　p の近傍での固有ベクトルの様子．S は安定固有ベクトル U は不安定固有ベクトルを表す．

符号理論に詳しい読者なら「生成行列に同一列ベクトル $g_1=\cdots=g_r$ を入れるのは不自然だ」と思うかもしれないが，次の 5.3 節ではこのような仮定をつけずに一般的な非線形項に関する結論を述べる．そこではこの特殊な状況でみた p の近傍での振舞いが，生成行列の一次関係式を橋渡しにして非線形項まで含めた形に拡張される．

5.3 近似最尤推定復号

ここまでの議論を用いて問題 2 を再考しよう．最尤推定復号 (4) は補題 3 から有理写像表現をもつので，この有理写像を低演算かつ高精度に近似することで問題 2 に取り組むことが可能となる．また命題 4, 5, 6 を通じて有理写像の不動点やその安定性などの復号として意味が明らかになった．特に命題 6 は不動点 p の近傍での写像の振舞いが復号性能に影響を与えることを示唆している．そこで p の周りで有理写像を l 次テイラー近似

$$\tilde{f}(u)=p+Jv+f^{(2)}(v)+\cdots+f^{(l)}(v),\quad v=u-p, \quad (9)$$

し，この $\tilde{f}(u)$ を用いて l 次近似最尤推定復号を

$$\psi:\mathbb{F}^n\ni y\mapsto\tilde{x}\in\mathbb{F}^n, \quad (10)$$

$$\tilde{x}_i:=\begin{cases}1, & \tilde{f}_i(u^0(y))\ge 1/2\\ 0, & \tilde{f}_i(u^0(y))<1/2\end{cases},\quad i=1,\cdots,n$$

で定めてみよう．次の定理は命題 6（線形項のみ）を非線形項まで拡張した結果であり，生成行列の列ベクトルの一次関係式が自然な形で一般化され

ている．

定理 7 $l \geq 2$ とする．このとき生成行列 $G = (g_1 \cdots g_n)$ の異なる l 個の列ベクトルがすべて一次独立ならば l 次テイラー近似 (9) は

$$\tilde{f}(u) = p + Jv + f^{(l)}(v), \quad v = u - p$$

で与えられる．ここで l 次項の第 i 成分 $f_i^{(l)}(v)$ は

$$f_i^{(l)}(v) = \sum_{(i_1,\cdots,i_l)\in\Theta_i^{(l)}} (-2)^{l-1} v_{i_1} \cdots v_{i_l},$$

$$\Theta_i^{(l)} = \{(i_1,\cdots,i_l) | 1 \leq i_1 < \cdots < i_l \leq n, (i_k \neq i), \quad g_i = g_{i_1} + \cdots + g_{i_l}\}$$

で与えられる．

定理 7 の意味するところを幾つかの視点で考察してみる．まずは問題 2 との関係であるが，ここで提案した l 次近似最尤推定復号 (10) は近似次数 l を大きくすることで復号の精度は良くなるであろう．一方低演算という観点からはテイラー近似 (9) において不必要な非線形項はあらかじめ零であることが望ましい．つまり定理 7 は最初に現れる非線形項のみで最尤推定復号を近似する場合，生成行列の一次独立性を高めることでこれら 2 つの要望に答えることができることを示している．ちなみに文献 2) ではここで提案した近似最尤推定復号の数値的な性能評価も行い良好な結果が得られている．興味がある読者は参照されたい．

次に最小距離との関係である．補題 2 でパリティ検査行列 H の列ベクトルの一次独立性が最小距離を定め，その最小距離が「符号化」の性能を制御する仕組みを解説した．一方定理 7 は生成行列 G に対する列ベクトルの一次独立性が「復号化」の性能を制御することを表している．つまり「符号化／復号化 $\Longleftrightarrow H/G$」という双対関係が明らかになり，これにより代数的符号理論の手法が復号化の設計にも応用できるようになる．

また純粋に数学的な視点からは，行列 G から作られる有理写像 (5) のテイラー展開の係数が G の列ベクトルに関する組合せ論的性質によって定まる点が興味深い．実は少し計算してみるとわかるが，最低次の非線形項だけでなくさらなる高次項についても G の列ベクトルの一次関係式（若干複雑になるが）によって展開係数は決まっているようである．最尤推定復号のさらなる代数構造を調べることで一般的な公式は導けるだろうか？

6. おわりに

後半は若干駆け足になったが，本稿では有理写像を経由することで最尤推定復号が含んでいる代数的構造を解きほぐしてみた．もちろん目指す先には問題 2 や問題 1 がある．そのために必要となるであろう今後の課題を以下にリストアップする：

1. 近似最尤推定復号の性能をいかす符号化のクラスを考え，それをもとに誤り率の解析的評価を行う．

2. 代数幾何符号の手法を生成行列の設計に用いて近似最尤推定復号の性能評価に応用する．

3. 有理写像力学系（写像の反復）や連続勾配系 $du/dt = \nabla(\log H(u))$ の生成行列による分類や解析を行う．

これらの課題は最尤推定復号に現れる**非線形性**をいかにして符号化の**線形関係式**で特徴づけるかという問題に帰着する．この取り組みの先に**シャノン限界**は見えてくるだろうか．深めていこう．

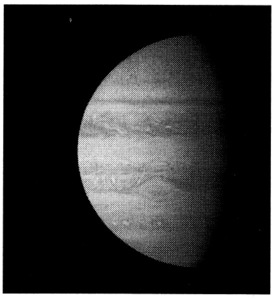
参考文献

1) R.G. Gallager, *Information Theory and Reliable Communication*, John Wiley and Sons (1968).
2) K. Hayashi and Y. Hiraoka, Rational Maps and Maximum Likelihood Decodings, http://arxiv.org/pdf/1006.5688v1
3) W.C. Huffman and V. Pless, *Fundamentals of Error-Correcting Codes*, Cambridge University Press (2003).
4) 國府寛司,『力学系の基礎』, 朝倉書店 (2000).
5) T. Richardson and R. Urbanke, *Modern Coding Theory*, Cambridge University Press (2008).
6) C.E. Shannon, A Mathematical Theory of Communication, *Bell System Technical Journal*, vol.**27**, pp.379–423 and 623–656 (1948).

（ひらおか・やすあき，九州大学マス・フォア・インダストリ研究所／JST さきがけ）

回転する球面上の流体運動

乱流の中の弱非線形効果



Cassini が撮影した木星 (NASA Cassini-Huygens Collection)[21].

山田　道夫

1. はじめに

コンピュータが今ほど潤沢に使えなかった頃は，乱流の理論研究はほとんどが一様等方性乱流を対象とするもので，エネルギースペクトルとエネルギー輸送関数の振舞いが解析の主題だった．その後，コンピュータの発達によって流れ場の詳細な観察が可能となり，複雑な条件下における乱流が数値実験の対象として扱われるようになった．しかしそれによって乱流の理論的理解が非一様非等方乱流まで進んだ，というわけではなく，現状は，多くの数値実験によって速度場の詳細なデータが入手可能になったという辺りである*1)．本格的な理論構築にむけてのブレークスルーはまだ見つかっていない．ここでは最も簡単な**非一様非等方乱流**の一例を紹介することにしたい．

質点の運動に対する回転の効果は遠心力と**コリオリ力**である，とは高校で習う事柄である．遠心力については「物理」で扱い，コリオリ力は「地学」で扱うのが慣例のようであるが，数学を用いずにコリオリ力を説明するのは非常に難しい．実際，昔，高校で習ったときには先生が説明を投げ出してしまい，よく分からないままに終わってしまった．筆者も，コリオリ力を高校生に分かるように説明せよ，と言われると無力感に襲われる．回転が絡むとこのように直観的把握が難しくなるが，それでもたった一個の質点の運動であれば，遠心力のほかに速度に直交するコリオリ力を受けるということを心得ておけば，現象を定性的に予想することは何とかなりそうである．

しかしこれが流体となると定性的な予想さえ怪しくなる．

大気や海洋は横方向の拡がりに比べて非常に薄い流体層なので，ほぼ水平に2次元的に動くと期待してまずは平面の2次元運動を仮定し，さらに一番簡単な流体として非圧縮性流体を想定する．これに回転効果を入れれば回転の影響の基本的な性質を調べることができる，と考えるのは自然である．しかしこれはうまく行かない．この平面2次元流体の系では，一様回転の効果は圧力によって吸収されてしまうため，回転の効果は表れない．

もともと大気海洋は丸い地球の上に乗っているので，コリオリ力の大きさは，北極と南極が最大で赤道ではゼロ，というように緯度に依存する．そこで平面の2次元流体の場合も，一様回転だけでは効果がないので，回転の強さを「y 座標に比例させる」ということを行って回転の緯度依存性を取り入れた「**ベータ平面**」が考えられた．大気海洋の大規模な流れパターンで，このベータ平面を用いて理解できる事柄は多い．ということは，地球上の大気海洋のような大規模流体運動の骨格を決めているのは回転効果の緯度依存性であるということでもある．一様回転の効果さえあまり直観的ではないのに，さらにその緯度依存性が及ぼす影響を思い描くことはかなり難しい．少し複雑な状況では何が起こるのか容易に予想できない．

過去1世紀の間に流体運動の理解が進展したのは，日常経験と実験室における詳細な流体実験が理論解析の道しるべとなってきたことが大きい．パイプや自動車など身の回りの流れについては，かなりの程度コントロールされた実験が可能であり，その結果今では，基礎的な流れについての莫大なデータを利用できるようになっている．

しかし，地球上の大気や海洋などの大規模運動は，コントロールされた実験が難しいだけでなく，前世紀

*1) 工学的には LES などの計算法が多くの応用分野に普及した．

の終わり近くまで観察することさえ難しかった．このため，日常生活の中での経験はあまり役に立たず，実験観察による基礎的データの蓄積も限定的であって，一連の基礎的流れについての知識といったものが積み上げられなかった．さらに，これらの流体運動において非線形性の果たす役割は小さくないが，非線形挙動の組織的研究が可能になったのは，これもコンピュータ資源が豊富になった前世紀の終わりになってからである．実験研究が困難な分，計算機シミュレーションが果たす役割は大きいが，日常経験を補うにはほど遠い．大規模な流れでは，基本的な流れについての初歩的疑問でも，数値実験してみるまでは定性的な答さえわからない，ということも珍しくない．**回転球面上の 2 次元乱流**もそういう流れの一つである．

■ 2. Rossby 波 ■

地球や惑星の大気運動の特徴は，様々な惑星があるにも関わらず，ほぼどれにも東西方向の帯状構造が見られることである．金星は地球と逆方向（西向き）に非常にゆっくり自転（243 日*2)）するが，大気には強い西向きジェット（100 m/s）が見られる*3)．木星は東向きに回っていて（0.41 日），大気には東向きジェットと西向きジェット（100 m/s）が交互に並ぶ縞状構造が見られる．土星も東向きに回っていて（0.44 日）大気には赤道を中心とする強く巨大な東向きジェット（500 m/s）が存在する．天王星と海王星には赤道と中高緯度に向きの異なる東西ジェットが存在する．このように**東西方向のジェット**が普遍的に存在するのはもちろん惑星が自転しているからである．ここで仮に東向きに回転する球面上に流体を静止させておいて，それらを一様に混ぜたとすると，角運動量保存則から赤道上では西向きの流れが生じることになる．ところが木星や土星では赤道域ジェットは東向きである．東西ジェットの成因はそう単純ではない．実際，惑星大気の運動では，太陽や惑星内部からの熱供給や鉛直方向の大気成層の効果も大きく，そのため，観測されるような東西ジェットの形成要因を特定するために，多くの要因を取り込んだ複雑なモデルによる研究が続けられている．

歴史を振り返ると，このような東西ジェットの研究に先鞭をつけたのは 1970 年代後半の Williams (1978)[1] の数値計算である．彼は，回転球面上で小スケールの強制力を伴う非圧縮性 2 次元流の数値実験を行った．これは当時の計算機資源の制約から，流れ場に経度方向の 8 回対称性と赤道対称性を仮定した制約の強いものであったが，得られた流れは東西平均流が縞状構造を示し木星を思わせる魅力的なものだった．しかしこの路線の研究は 10 年以上停滞する．これには，地球科学の多くの研究者が多様な要素を取り込んで現実大気を再現する大循環モデル（GCM）の開発と研究に集中し，簡単な力学モデルによるいわば物理学的なアプローチからは距離を置いていたという背景があった．誤解を避けるために付け加えると，現実の惑星大気運動を決めている大きな要因は熱であり，大気運動を包括的に扱うにはさらに多くの効果を含んだ大規模数値モデルが必要である．ここで扱う 2 次元乱流は，複雑な大気運動を一部説明する可能性のある簡単モデルとしての意味と，もう一つ，多くの惑星に普遍的に現れる東西ジェットの機構を単純なものから順に理解するための一番簡単な理論モデルという意味がある．それはつまり，この簡単なモデルでさえ，発生する流れの形態と機構について我々は十分な知識を持っていないということでもある．

Williams の問題が，発達した計算機を用いて流れ場の制約なしに再計算されたのは 1990 年代の初め頃である[2]．この計算は，強制力の任意性を嫌い回転球面上で自由減衰する非圧縮性 2 次元乱流を扱ったが，結果は Williams のものとはかなり異なっていた．球面上で一様な初期条件から出発した計算では，しばらく経つと，中低緯度域に弱い東西流の縞々構造が現れるものの，遥かに顕著な特徴は北極と南極の周りを回る強い西向きジェットが形成されることであった（図 1）．球面を回転させない場合は，流れ場は基本的に通常の自由減衰 2 次元乱流と同じで，融合成長を繰り返す正

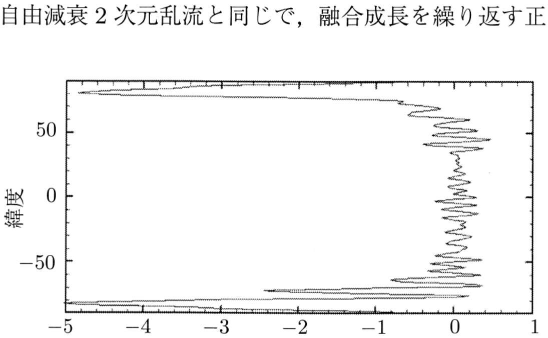


図 1　東西速度の東西平均[15]．

*2)　地球日で測った自転周期．以下同様．

*3)　西向きとは「惑星自身に乗って見たとき西向き」の意味とする．以下同様．

と負の大きな秩序渦が現れる．当然このときの場は統計的には一様等方である．しかし回転を加えるとその性質が一変し，運動エネルギーは東西方向の流れに集中し特に南北両極には強い**西向き周極ジェット**が形成される，というのがこの数値実験の結果である*4)．

先に述べたように，2 次元流れに対する回転効果は古くからベータ面近似を用いて議論されている．ベータ面近似は 70 年ほど前に Rossby (1939)[4] が導入したもので，回転球面上の局所的な運動を「接平面」の上の運動と考えコリオリパラメータを $f = f_0 + \beta y$ のように緯度方向座標 y に線形に依存させることによって回転効果の緯度依存性を取り入れる．そもそも，このベータ平面上では 2 次元乱流はどのように振る舞うか，という問題は古く Williams の計算以前に Rhines (1975)[5] によって自由減衰の場合が調べられ，東向きジェットと西向きジェットが南北に交互に並ぶ縞々構造が形成されることが知られていた．ベータ平面上の流れは渦度方程式

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + J(\zeta, \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = D \qquad (1)$$

によって記述される*5)．この方程式の最も重要な特徴は，左辺第三項（β 項）に起因する分散関係

$$\omega = -\frac{\beta k_x}{k^2} \qquad (2)$$

をもつ線形波動（**Rossby 波**）$\psi = \exp[i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - \omega t)]$ が存在することである．非線形項と β 項を比べると，**Rhines 波数**

$$k_\beta = \sqrt{\frac{\beta}{U}} \qquad (3)$$

を境として*6)，高波数側は非線形項が卓越する乱流領域，低波数側は β 項が卓越する Rossby 波領域となると推測される．これは 2 次元乱流のエネルギー逆カスケードが k_β で阻害されることを意味し，阻害されたエネルギーが東西の**縞々構造**を作ることになる（Rhines 効果）と解釈された*7)．

*4) 初期の一様等方に乱れた場から周極ジェットが形成されるアニメーションはネット上で見ることができる[18]．

*5) ψ は流れ関数，$\zeta = \Delta\psi$, D は粘性項[20]．類似の方程式はプラズマのドリフト波にも現れる（Hasegawa–Mima 方程式）．

*6) U は流れ場の速度スケール．

*7) ベータ面乱流のエネルギー輸送構造を，このようにあたかも波数空間で等方的であるように語るのは正確ではない．特徴的な 2 次元構造や擬保存量の存在，Rossby 波の共鳴など多くの事柄がある[3]が，エネルギー輸送の機構が整合的に整理されているわけではない．

このベータ面乱流は非等方であるが極域を想定しない一様な乱流である．従って球面上の周極ジェットを含まないのは当然であるが，ベータ面乱流に見られる縞々構造が非等方な球面上で実現されるかどうかも明らかではない．実際，高速回転する球面上で数値実験を行うと，流れのエネルギーの大半はこの周極ジェットに吸収され，その結果，中低緯度の縞々構造は弱いものになる．つまりベータ面乱流に見られる縞々構造は，運動エネルギーが縞々領域に居続けることを前提とした構造であって，エネルギーが周極ジェットに移動する球面上では影が薄くなる．このように非等方性は長時間後の漸近的な振舞いに強く影響を及ぼしている．ただし中低緯度域の縞々構造は，弱くても一旦形成されると以後残り続ける傾向もあり，消えてなくなるというわけでもない*8)．

しかしそれにしてもなぜ極域に西向き周極ジェットが形成されるのかという疑問が残る．これは乱れた場から自発的に現れる顕著な構造だけに魅力的な現象である．その生成過程を語る整合的かつ定量的な理論は得られていないが，ある程度弱非線形のレジームで語れそうだという状況はある．

ここでいう弱非線形とは，流れを東西平均流 $(\overline{u}, 0)$ とその周りの撹乱 (u', v') に分け，撹乱の 2 次の効果による $\overline{u}$ の変化を見積もるという意味である．このとき $\overline{u}$ の時間発展は緯度を ϕ として

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{u}\cos\phi) + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\overline{u'v'}\cos^2\phi) = D_1 \qquad (4)$$

に従う．これを **wave activity** と呼ばれる量の東西平均

$$\overline{\mathcal{A}} = \frac{\overline{\zeta'^2}\cos\phi}{2\hat{\beta}} \qquad (5)$$

の従う方程式*9)

$$\frac{\partial \overline{\mathcal{A}}}{\partial t} + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(-\overline{u'v'}\cos^2\phi) = D_2 \qquad (6)$$

と比較すると*10)，球面の回転角速度が大きなとき，撹乱による運動量流束 $\overline{u'v'}$ の収束が，東西平均流の西向き加速と wave activity の減少を同時に引き起こす

*8) この縞々構造は時間発展のごく初期に Rhines 効果によって形成される．このような形成過程を詳しく論じるためには数値実験の初期条件，特に初期スペクトルと Rhines 波数の大小関係を考慮する必要がある．

*9) $\hat{\beta} = \beta - (\partial/\partial\phi)(1/\cos\phi)(\partial/\partial\phi)(\overline{u}\cos\phi)$, $\beta = 2\Omega\cos\phi$.

*10) D_1, D_2 は粘性由来の項．

ことが分かる．これは，伝播してきた Rossby 波が散逸するとそこに西向きの流れが生成されること，つまり，Rossby 波は西向きの角運動量を運ぶことを示している．

平行な主流と線形攪乱の間の運動量のやり取りは，流れの安定性理論における古くからの主題である．そこでは，攪乱の（主流方向の）位相速度と主流の速度が一致する点（臨界点）において，集中的に運動量が移動することが知られている．回転球面上では攪乱は Rossby 波であり，極域に近づくほど Rossby 波の西向き位相速度は小さくなる．これに対し周極ジェットは極域近くに西向きの最大速度を持つため，臨界点（臨界緯度）が発生し易くなり，その結果，形成された周極ジェットがさらに Rossby 波の西向き運動量を吸い込むことになる，というシナリオを描くことができる[6]．Rhines 波数の表式 (3) から分かるように高緯度側は乱流領域，低緯度側は Rossby 波領域となるが，この臨界緯度はその境目付近に位置している．Rossby 波は，この低緯度側の Rossby 波領域の角運動量のうち西向きの成分を選択的に高緯度に運びそこに落とすことによって，極周りの西向きジェットを形成する*11)．これは球面全体をかき混ぜて角運動量を一様化することとは大きく異なるメカニズムである．

3. 強制乱流

周極ジェットは自由減衰乱流の著しい特徴であるが木星にはそのようなものはない．そもそも Williams の数値実験は小さな空間スケールをもつ強制力を仮定していたし，長時間後の定常的な振舞いを見るには強制力を仮定しなければならない．惑星形成は遥か昔のことという事情もある．

強制力の選択にはかなりの幅があるが，流れの性質を見るにはなるべく構造を持たない強制力が望ましい．このような数値実験はまず 1990 年代後半に Nozawa and Yoden (1997)[7] によって行われた．渦度方程式 (1) に付加された強制力は，空間的にはある程度大きな波数をもって球面上一様に分布し，時間的にはマルコフ過程を乱数で模擬したものである．初期場ゼロから出発した数値結果は，意外なことに，自由減衰乱流の場合の特徴であった強い周極ジェットが現れるのは強制力の空間スケールが初期段階での Rhines スケールよりも小さいときだけで，そうでない場合は中低緯度域に多数本のジェットの縞々構造が卓越する傾向を示していた．

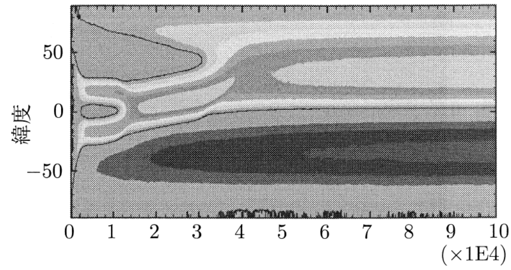


図 2 東西平均した（北極方向）角運動量の時間変化（横軸は時間，縦軸は緯度）．終状態が 2-ジェット（北半球で東向き，南半球で西向き）の場合[8]．

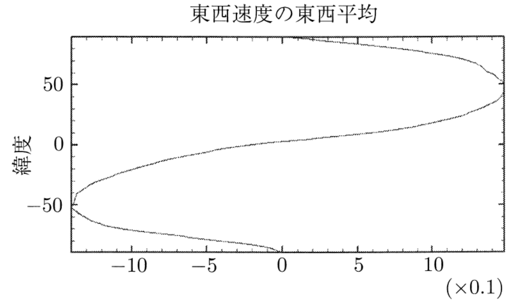


図 3 2-ジェット状態（長時間後の漸近状態）[8]．

この数値実験は周極ジェットが強制乱流には現れない可能性を示した重要なものであるが，当時の計算機事情も反映して時間積分は自転 1000 回転で終了している．そこでこの時間積分の時間を数百倍に伸ばした計算が最近行われた[8]．その結果（図 2, 4）は，強制乱流では周極ジェットが出現してもそれは時間の初期段階に限られ，長時間後には周極ジェットはすべて消滅することを示している．さらに，Nozawa and Yoden において中低緯度域に縞々構造が見られた場合についても，時間積分を延長すると，縞々構造を形成していた多数本の東西方向のジェットは，消滅したりジェットどうし融合したりして最終的には，北半球と南半球に一本ずつ異なる方向のジェットが存在する 2-ジェットの状態（図 3）か，あるいは，赤道上のジェットがそれとは反対方向の南北半球内の 2 本のジェットを従える 3-ジェットの状態（図 5）に落ち着くという結果が得られている．終状態が複数あるのは若干の気持ち悪さがあるが，3-ジェット状態に様々の摂動を加えてみても 2-ジェットへの遷移は起こらないようである*12)．

*11) 流れ場が球面の一部に制限されるときは境界の影響を受けて東西ジェットの向きも変化する[19]．

*12) 強制力が時間的に白色のときの計算は Huang and Robinson (1998)[16] によって行われた．

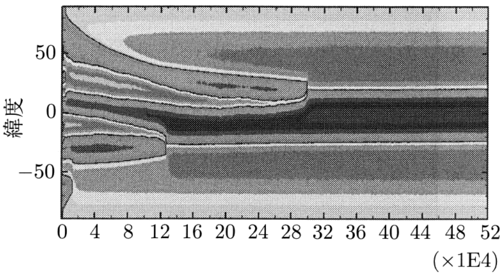


図 4　東西平均した（北極方向）角運動量の時間変化（横軸は時間，縦軸は緯度）．終状態が 3-ジェット（赤道上で西向き，中緯度で東向き）の場合[8]．

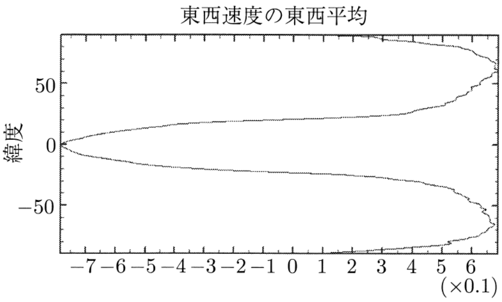


図 5　3-ジェット状態（長時間後の漸近状態）[8]．

ここで見られた 2-ジェットと 3-ジェットはいずれも中低緯度に拡がった南北に幅広のもので，自由減衰の場合の鋭い周極ジェットとは全く異なるものである．そこでなぜ周極ジェットが残らないのかという問題が生じる．強制力をかなり小さな空間スケールで与えても周極ジェットの形成が妨げられるので，Rossby 波による角運動量輸送を妨げる何かがあるのか，あるいは Rossby 波そのものが「足りなくなる」のかもしれないが，理由は良く分かっていない．もう一つの問題，なぜ中低緯度の幅広ジェットが残るのかについても確かなことは分かっていない．これは乱流場の自発的秩序形成問題であるが，得られる幅広ジェットはごく単純な形をしていて球面調和関数 Y_2^0 および Y_3^0 で近似することができるので，層流の問題としての安定性も気になる．

回転する球面上で球面調和関数で表される（層流の）流れは，ちょうど平面の 2 次元トーラス上で三角関数で表される流れに相当する．いずれも一方向に向いた流れで，流れに垂直な座標にしか依存しない．また，いずれもラプラス作用素の固有関数なので非線形項は自動的にゼロとなり，簡単な外力の下での定常流を記述する．平面 2 次元トーラスの上の流れは，Kolmogorov が 1950 年代の終わりに彼のセミナーで取り上げ Navier–Stokes 方程式の解を詳細に調べるための題材として提案したもので，現在 **Kolmogorov 流**として知られている．境界のないコンパクト 2 次元多様体という意味では球面とトーラスは最も単純な（種数が 0 と 1）2 つの多様体になるわけで，球面上の流れと Kolmogorov 流の異同には領域形状の影響を調べるという意味もある．Kolmogorov 流は，その後，多くの研究者によって詳しく調べられ，線形安定性はもちろん分岐ダイヤグラムや解の特徴[9]，カオス化の過程やカオス状態の性質[10]などについて知られていることは多い．Kolmogorov 流の基本的な性質の一つとして，トーラスの形状比（流れ方向の周期／流れに垂直な方向の周期）が 1 よりも小さなときは，最小波数の三角関数で表される流れが任意の Reynolds 数において大域安定であることが知られている[9]．

球面上では，Y_1^0 の解は角運動量保存則より時間変化しないので Y_2^0 の解がこの「最小波数」の流れに対応する．実際，この Y_2^0 の流れは，回転のあるなしに関わらず，任意の Reynolds 数において**大域安定**な解であることが証明される[11]．この意味で，強制乱流の場合に時間発展とともに 2-ジェットに落ち着くのは（気持ちの上で）納得できる．しかし 3-ジェットに相当する Y_3^0 の解については大域安定性は成り立たない．実際，回転のない球面上においてはこの解は比較的小さな Reynolds 数において不安定化し，数値的な分岐解析の結果によれば，そこから分岐する解もすべて有限の Reynolds 数において線形不安定となる．しかし一般的に回転は流れを安定化させる傾向がある．事実，球面を回転させると解の安定性は劇的に変化し，数値結果によれば，正方向と負方向にある程度以上大きな回転角速度では Y_3^0 の流れは任意の Reynolds 数において線形安定となり，またその領域では Y_3^0 以外の解は見つかっていない[11]．実際に数値実験で得られた 3-ジェット解のパラメータはいずれもこの層流 3-ジェット解の安定領域に入っており，最終状態としての 3-ジェット状態を支持するように見える．ただしそれならばなぜ 2-ジェット解にまで落ちる場合があるのかという疑問は残る．そもそも，層流としてのジェットは Rhines スケールよりも幅広の場合線形安定となることが知られているが，数値実験で得られる 2-ジェットや 3-ジェットはいずれも Rhines スケールよりもかなり幅広のもので，それは途中段階のジェットの融合や消滅も Rhines スケールよりも幅広のもので起こることを示している．層流としての安定性を敷衍して乱流

中のジェットの消長を解釈するとやや恣意的にならざるを得ない．

現在，乱流中のジェットの安定性を議論できる信頼できる枠組みは知られていない．ジェットが背景の乱流場によって安定化あるいは不安定化する機構が現実の惑星大気において重要な役割を果たしていることは想像に難くないが，その理論化は未解決問題である．しかし示唆的な結果を得るための試みはいくつか行われている．その一つはベータ面上で東西ジェットを南北方向の sin 型の流れに重ねられた弱非線形な東西流として扱い，適当なスケーリングを用いて弱非線形段階の方程式を導こうとするものである．この方針によって Manfroi and Young (1999)[12] は弱非線形段階を記述する Cahn–Hilliard 型の方程式を導いた．南北方向の sin 流の効果を，乱流の効果を示唆するものと考えるわけである．この方程式には簡単な定常ジェット解が存在する．しかしそれらすべては線形不安定であり，不安定モードの発達の（Cahn–Hilliard 方程式の）数値実験は，不安定性の結果ジェットが消滅することを示している．これは図 2 や図 4 に見られるジェットの消滅に「似ている」[13]．また 2 つのジェット解の弱い非線形相互作用を調べると，ジェットどうしは互いに引き合ってジェット間距離は次第に縮まることが分かるが，これも図 2 と図 4 におけるジェットどうしの融合を思わせる．弱非線形化された描像がどの程度，もとの現象を捉えているのか評価し難いが示唆的な結果ではある．

■ 4. おわりに ■

自由減衰乱流における周極ジェットの形成機構は Rossby 波による選択的角運動量輸送と考えられる．しかし強制乱流ではジェットに重畳する乱流によってジェットの不安定化・消滅・融合が引き起こされるように見える．この強制乱流においてジェットが少数本にまとまってゆく過程の特性時間は非常に長く，ジェットの不安定化があるにしてもそれは非常に弱い．惑星大気を問題の背景に想定するなら長時間後の**漸近状態**を問題にしなければならないが，そこでは微かな効果が決定的な役割を果たす可能性があるということでもある．しかしまた，そのようなかすかなダイナミクスを数値計算できちんと捉えられるのかという疑問は残るだろう．

別の特徴もある．図 2 と図 4 の東西ジェット形成過程を詳しく見ると，時間の初期段階において形成される流れ場が長時間後の（2-ジェットか 3-ジェットかの）状態を決めているようである．これは，回転球面上の非圧縮性 2 次元乱流における東西ジェットは強制力や初期条件によって異なる漸近状態をもつこと，つまり初期段階の記憶を長く留める可能性を示唆している．

このような性質が現実に近いモデルにも引き継がれるのかどうかも重要な問題である．回転球面上で非圧縮性 2 次元流の次の段階のモデルとしては浅水方程式系を考えるのが自然である．後者における自由減衰乱流の計算は Cho and Polvani (1996)[14] によって行われやはり西向きジェットが形成されることが観察されたが，それは前者のような周極ジェットではなく赤道域の西向きジェットであった．近年，数多くの系外惑星が発見されているがその想像図にしばしば赤道域の西向き流れが描かれるのはこの結果によるところが大きい．Cho and Polvani 以後，多くの研究が重ねられ，Rossby 波束が低緯度に留まり赤道に西向き角運動量を落としてジェットを形成するという描像が描かれている[6,17]が，強制力を伴う場合に長時間後の漸近状態がどうなるのかについては明らかになっていない．単純な系ではあるが，非一様非等方乱流からの秩序形成過程に残されている課題は多い[*13]．

参考文献

1) G.P. Williams, "Planetary circulations:1. barotropic representation of Jovian and Terrestrial turbulence", *J. Atmos. Sci.* **35**, 1399 (1978).
2) S. Yoden and M. Yamada, "A Numerical experiment on two-Dimensional Decaying turbulence on a rotating sphere", *J. Atmos. Sci.* **50**, 631 (1993).
3) K. Ishioka, M. Yamada, Y.-Y. Hayashi and S. Yoden, "Technical approach for the design of high-resolution spectral model on a sphere", *Nonlinear Processes Geophys* **7**, 105 (2000); K. Ishioka, J. Hasegawa and S. Yoden, "Asymmetrization mechanism of jet profiles in decaying β-plane turbulence", *J. Atmos. Sci.*, **64**, 3354.
4) C-G. Rossby, "Relation between Variations in the Intensity of the Zonal Circulation of the Atmosphere and the Displacement of the Semi-Permanent Centers of Action", *J. Marine Res.* **2**, 38 (1939).
5) P.B. Rhines, "Waves and turbulence on a beta-plane", *J. Fluid Mech.* **69**, 417 (1975).

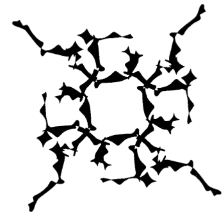
---

*13) 本稿は回転球面上の流れの力学の一部分に触れたのみであることをお断りしておきたい．また関連する重要な文献は多いがここでは直接引用したもののみ掲げる．

6) Y.-Y. Hayashi, S. Nishizawa, S. Takehiro, M. Yamada, K. Ishioka and S. Yoden, "Rossby Waves and Jets in Two-Dimensional Decaying Turbulence on a Rotating Sphere", *J. Atmos. Sci.* **65**, 4246 (2007).
7) T. Nozawa and S. Yoden, "Formation of zonal band structure in forced two-dimensional turbulence on a rotating sphere", *Phys. Fluids* **9**, 2081 (1997).
8) K. Obuse, S. Takehiro and M. Yamada, "Long-time asymptotic states of forced two-dimensional barotropic incompressible flows on a rotating sphere", *Phys. Fluids* **22**, 056601 (2010).
9) 岡本久，『ナヴィエ・ストークス方程式の数理』，東京大学出版会，2009.
10) M. Inubushi, M. Kobayashi, S. Takehiro and M. Yamada, "Covariant Lyapunov analysis of chaotic Kolmogorov flows", (2011), submitted.
11) E. Sasaki, S. Takehiro and M. Yamada, "Instability and bifurcation of steady zonal solutions of the two-dimensional Navier–Stokes equation on a rotating sphere", (2011), in preparation.
12) A.J. Manfroi and W.R. Young, "Slow Evolution of Zonal Jets on the Beta Plane", *J. Atmos. Sci.* **56**, 784 (1999).
13) K. Obuse, S. Takehiro and M. Yamada, "Linear stability of steady zonal jet flows induced by a small-scale forcing on a β plane", (2011), submitted.
14) J.Y.-K. Cho and L.M. Polvani, "The emergence of jets and vortices in freely evolving shallow-water turbulence on a sphere", *Phys. Fluids* **8**, 1531 (1996).
15) S. Takehiro, M. Yamada, and Y. Hayashi, "Energy accumulation in easterly circumpolar jets generated by two-dimensional barotropic decaying turbulence on a rapidly rotating sphere", *J. Atmos. Sci.* **64**, 4084 (2007).
16) H-P. Huang and W.A. Robinson, "Two-dimensional turbulence and persistent zonal jets in a global barotropic model", *J. Atmos. Sci.* **55**, 611 (1998).
17) Y. Kitamura and K. Ishioka, "Equatorial jets in decaying shallow-water turbulence on a rotating sphere", *J. Atmos. Sci.* **64**, 3370 (2007).
18) 石岡圭一，山田道夫，林祥介，余田成男，"回転球面上の減衰性 2 次元乱流からのパターン形成"，日本流体力学会ウェブサイト「ながれマルチメディア」(1999)，http://www2.nagare.or.jp/mm/99/ishioka/index_ja.htm
19) Y. Taniguchi, M. Yamada and K. Ishioka, "Zonal current formation in two-dimensional turbulence on a rotating hemisphere and its dependence on boundary conditions", *Fluid Dyn. Res.*, **38**, 550 (2006).
20) P.K. Kundu and I.M. Cohen, *Fluid Mechanics*, Academic Press, 4th ed., 2008.
21) http://www.nasaimages.org/

（やまだ・みちお，京都大学数理解析研究所）

非線形で心筋不整を治療する



M. Hörning・高 木　清 二

1. はじめに

渦は様々な自然現象に現れ，その幾何学的な美しさからしばしば人々を魅了する．しかし，渦は必ずしも我々にとって好ましいものではなく，例えば超伝導状態で現れる渦糸は電流を流す際に抵抗発生の原因となり，また，様々な流体で発生する乱流は実効的な粘性を上げるため，例えばパイプによる液体の輸送効率の低下を招く．前者の場合，超伝導物質に不純物を導入することで異質な部分に渦が固定され抵抗発生を抑制することができる．実は我々の体の中でも似たようなことが稀に起きることがある．その一つが本稿の主題である**頻脈**や**細動**と呼ばれる不整脈である．

心臓は振動性媒体と興奮性媒体の組合せでできている．心房の一部のペースメーカー細胞群が振動的な電気活動を示し，その電気活動が刺激により一過性の興奮を示す細胞群に伝播し，心房全体に伝播した後に心室へ侵入し興奮が一気に心室全体に伝わる．心筋組織は電気的興奮に伴い収縮するので，電気的活動が規則正しい時空パターンを示すことで心臓のポンプとしての機能が発現する．しかし，何らかの原因でこの電気的興奮の波が渦のようにある部分を中心に回転し始めることがある．すると，興奮の時空パターンが崩れ，ポンプとしての機能が低下してしまう．多数の渦が発生する場合が細動であり，数ある不整脈の中でも心室細動は心臓突然死のおよそ9割を占め，適切な治療を施さないと確実に死に至る．

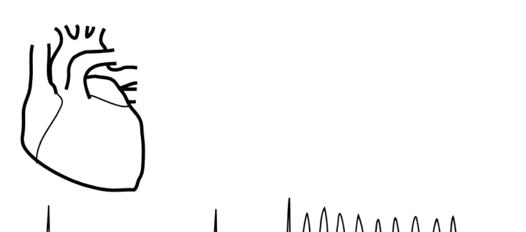


図1　心臓の模式図と正常な拍動から不整脈（頻脈から細動へ発展）が発生した際の心電図．

細動についての人類最初の記述はおよそ紀元前1550年のエジプトにさかのぼり，ドイツ人のGeorg M. Ebersによって発見された医学パピルスのEbers' Papyrusに見ることができる．そこには心臓の不整な動きとともに脈が感じられなくなることや，心臓が震え出すと死が近いといった心室細動の特徴が記載されている．このように心臓の病は古くから調べられていたが，実際に人類がその治療に成功するのはそれから約3500年後の1947年，米国人の心臓外科医Claude S. Beckによってである．彼は自ら設計した除細動器を用いて高電圧の電気ショックを直接心臓に与え，手術中に細動に陥った患者の心臓を正常な状態に戻すことに成功した．現在ではこの装置を一般人でも使うことができるようになり，“AED” ことAutomated External Defibrillator，日本語で自動体外式除細動器と呼ばれている装置がそれである．この装置

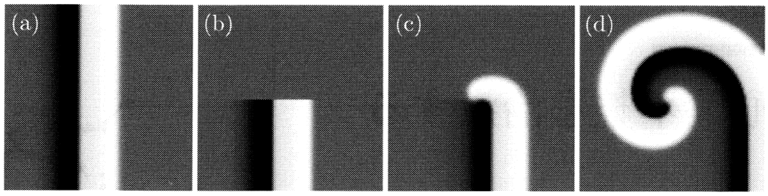


図 2　興奮波に端点を作った際のラセン波形成過程．色は膜電位の値を表し，灰色は静止状態，白は興奮期の電位に相当する．いま興奮波（平面波）は右向きに伝播しており (a)，上半分を静止状態にリセットすると (b)，端点は周囲の興奮を誘起し (c)，らせん状に巻き込む (d)．

は約 4 千ボルトもの高電圧を胸部にかけることで心臓全体を興奮させて興奮波の渦を消す．しかしながら電場のかけ方は経験に基づいて開発されてきており，除細動の際に心臓でどのようなことが起きているかは実はあまりわかっていなかった．近年，心臓活動の数理的な研究が進み，心筋組織の不均一性が心臓に電場をかけた際に重要な役割を担うことが明らかになってきた．このメカニズムをよく理解すると，より安全に除細動を行う方法が見つかるとの期待がある．

本稿ではまず致死性の不整脈の原因である興奮媒体に発生する回転ラセン波と，それを消滅させる基本的なメカニズムつまり除細動について解説する．そして電場をかけた際に心筋組織の不均一性がどのような効果をもつのかを紹介する．

2. ラセン波から細動へ

心筋組織の活動電位が描く渦模様はどのようなものであろうか．実際の心筋組織は異方性が高く，空間的にも不均一ではあるが，ここでは理想的に組織が一様で等方的であるとして興奮波の描く渦がどのような特徴をもつかを説明する．まずは興奮過程に少し触れてから，興奮がどのように伝播するかを見ていこう．

興奮性の心筋細胞は刺激による膜電位の上昇が閾値を越えると膜電位の脱分極が起こり，しばらく脱分極状態が続いた後，再分極して静止状態に戻る．この脱分極している間は外部から刺激を受けても何の応答も示さず，**絶対不応期**と呼ばれる．心筋組織のある部分で膜電位の脱分極が起こると，膜電位の空間勾配が生じるためにイオンの輸送が起こり，周囲の膜電位が興奮閾値に達し次々と興奮が伝播してゆく．その興奮はドミノ倒しのように一定速度で伝播する．

いま膜の興奮が平面波的に 2 次元平面を伝播しているとする（図 2 (a)）．ここで仮に波の半分を静止状態に戻してやり，波に端点を作るとどうなるだろうか（図 2 (b)）．興奮波の端点は波面の前方だけでなく側方にある周囲の静止状態の組織も興奮させるため，そこを中心に波は旋回しはじめ渦模様を描き出す（図 2 (c), (d)）．一定速度で伝播する波が描く渦は波と波の間が等間隔となるため，アルキメデスラセン $\theta \propto r$ になると予想される．ここで，r はラセンの中心から見た角度 θ 方向の波面の位置である．しかし，実際の波面の速度は波面の曲率に依存し，曲率 K の波面の法線速度 N と平面波の速度 c の間には

$$N = c + \varepsilon K \tag{1}$$

の関係がある．ここで ε は拡散係数である．ここで曲率 K は凸型のときに $K < 0$，凹型のときに $K > 0$ となるように定義する．つまり，ラセンは中心に行くほど曲率が負の大きい値となるので波の伝播速度は遅くなる．このような条件下で一定の形を維持したまま，一定の角速度 ω で回転する波の形を調べてみよう[1)]．波面の位置はラセンの中心を原点とする極座標を用いて次のように表せる．

$$x = r\cos(\theta(r) - \omega t), \tag{2}$$

$$y = r\sin(\theta(r) - \omega t). \tag{3}$$

これらの方程式から波面の法線速度 N は

$$N = \frac{\omega}{(1-\psi^2)^{1/2}}, \tag{4}$$

$$K = \frac{\psi'}{(1-\psi^2)^{3/2}} + \frac{\psi}{r(1-\psi^2)^{1/2}} \tag{5}$$

と計算できる．ここで $\psi(r) = r\theta'(r)$ である．これを式 (1) に代入すると ψ についての微分方程式

$$-r\frac{d\psi}{dr} = (1+\psi^2)\left(\frac{rc}{\varepsilon}(1+\psi)^{1/2} - \frac{\omega r^2}{\varepsilon} + \psi\right) \tag{6}$$

を得る．関数 ψ によりラセン波の波面の形は

$$\theta(r) = \int r^{-1}\psi(r)dr \tag{7}$$

と決定することができる．式 (6) は適当な境界条件の下で解析することができる．ここでは境界条件として

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(r) \sim kr \quad \text{as} \quad r \to \infty \tag{8}$$

を考えよう．これから，式 (6) は r が小さい所では，r の二次までの近似解として

$$\psi \sim -\frac{cr}{2\varepsilon} + \frac{\omega r^2}{3\varepsilon} \tag{9}$$

を与える．一方，r が大きい場合は同様に近似解，

$$\psi \sim -\frac{\omega r}{c} + \frac{\omega\varepsilon}{c^2} \tag{10}$$

を与える．ここで，$\omega = mc^2/\varepsilon$ とすると，

$$\psi = -\frac{\omega r}{c}\left[1 + \left(\sqrt{3} + \frac{cr}{\varepsilon}\right)^{-1}\right] \tag{11}$$

は $r \to 0$ で式 (9) に，$r \to \infty$ で式 (10) に近づく関数である．ここで，m は定数である．式 (11) を式 (7) で積分することで回転ラセン波の形状は近似的に

$$\theta = -m\left(\frac{cr}{\varepsilon} + \ln\left(\sqrt{3} + \frac{cr}{\varepsilon}\right)\right) + \text{const.} \tag{12}$$

と表される．

さて，これは形を変えずに一定の角速度で回転し続ける単一のラセン波の形状を表しており，ラセンの中心以外では一定の周期で興奮を繰り返すことを意味している．回転周期が短いと興奮波の波面と前の興奮波の不応期後部が相互作用するため，進行波のダイナミクスは複雑なものになる．

心筋組織が周期的に刺激を受けて興奮を繰り返している場合，活動電位の持続時間は一つ前の興奮からの回復状態に依存してその長さが決まり，回復が十分でないと次の活動電位持続時間は短くなる．刺激の周期が短くなると組織の回復特性に依存して持続時間の長短を繰り返すようになる．いわゆる周期倍分岐が起きる．刺激間隔が短くなるにつれて長短の差が大きくなり，最終的には興奮のブロックが起きる．回転ラセン波の場合，回転周期が短いと興奮の伝播ブロックが起きることになる．通常このような伝播ブロックはラセン波の一部で起きるため，その部分に新たな回転の中心が対生成する．このような波の破壊が一度起こると連鎖的に破壊が起こりはじめ，時空カオス状態へ系は発展する．これが細動と呼ばれる状態である．

3. 回転ラセン波の消滅

このようにして心臓に発生した多数の回転ラセン波に対して，C. Beck が心臓に与えた電気ショックは一体何を行ったのだろうか．実は回転ラセン波の生成と消滅が同時に起こっていたと考えることができる．ここでは，外部電場による回転波の生成と消滅について説明をする．

興奮波は主に 3 つのフェーズに分けることができる．第一に静止電位にある静止状態（RS）[■]．第二に興奮の起きている絶対不応期（AR）[◁, ▷] である．第三に絶対不応期と静止状態との間の受攻期（VW）[□] である．[ ] 内に示した記号を用いると，ある軸に沿って左から右に伝播する平面波は

■■□▷■■

のように表すことができる．ここで ▷ の向きは伝播方向を示す．回転ラセン波も同様の方法で記述することができ．回転ラセン波の中心を内包する円に沿って，左回りを正の方向として，回転ラセン波を記述すると，左回りと右回りの波はそれ

ぞれ

■■□ ▷ ■■,

■■ ◁ □■■

である．それぞれの両端はつながっていることに注意する．ここで**トポロジカルチャージ** q という量を定義しておくと便利である．簡単に説明するとどちら向きの回転ラセン波がいくつあるかを表す量であり，整数の値をもつ．より正確にはある閉じた経路に沿った積分，

$$q = \frac{1}{2\pi}\oint \vec{\nabla}\Theta \cdot d\vec{s} \tag{13}$$

で定義される．ここで，Θ は興奮のサイクル RS–AR–VW–RS の位相を 0 から 2π までの数値で連続的に定義したものであり，線積分は閉経路に沿って右回りに行う．すると，上記の左および右回転のラセン波の q の値はそれぞれ $q=+1$ と $q=-1$ となる．

では，刺激により回転波が消える過程を，1 次元の円周上を回る波の時間発展により見ていこう．最初に左回転の波があり，局所的な刺激が RS の領域のみに入った場合と VW を含む領域に入った場合の 2 通りを考える．前者の場合，刺激により RS の一部が RS から AR に変化する．つまり，時間発展は刺激を受けた領域を下線で表すと

1. □▷■■■■■■■■,
2. ■□▷■■$\underline{\text{◁▷}}$■■■,
3. ■■□▷◁□□▷■■,
4. ■■■□□■■□▷■,
5. ■■■■■■■■□▷

となり，左回転の波が一つ残る．チャージの総量を計算すると，元のラセン波のチャージ $q_0=+1$ に加え，刺激により両方向に進む波が発生するため $q_1=-1$ と $q_2=+1$ が生じる．つまり，総量は $q=q_0+q_1+q_2=+1$ であり，つじつまが合っている．一方，後者の場合，VW を含む領域に入った刺激は VW を境に AR 側は何の影響も及ぼすことができない．一方 RS 側は興奮させるため，系は次のように発展する．

1. ■□▷■■■■,
2. ■$\underline{\text{◁□}}$▷■■■,
3. ◁□■□▷■■,
4. □■■■□▷◁,
5. ■■■■■□□,
6. ■■■■■■■.

このように，刺激は反対回転の波を一つ誘起し，元の波と正面衝突することですべての回転波は消滅する．刺激により $q_1=-1$ のチャージが発生するため．チャージの総量は $q=q_0+q_1=0$ である[4]．2 次元でトポロジカルチャージを計算する方法は式 (13) をそのまま適用すれば良い．2 次元系における回転波の消滅を考えると，どの場所でも式 (13) の値が 0 となる，つまり任意の閉軌道に沿って 2π の位相のサイクルがどこにもない状態になるためには，互いに反対方向の回転波の中心の衝突が起きなくてはならない．つまり，逆方向にねじることで位相のねじれを解消する．この衝突による回転波の消滅は対消滅と呼ばれる．

体外式除細動器のように強力な電気ショックでラセンを消去する場合は心臓のすべての RS を興奮させることになる．そうするとラセンの中心を含む領域では，刺激により RS から AR になった領域は既存の VW を波の尾部とする逆回転の興奮波となり，その中心は曲線 VW の端，つまり元のラセンの中心と一致する．そのため対消滅がすべての回転ラセン波で起きることになり，位相のねじれのない正常な状態に戻る．

4. 組織の欠陥の効果

心臓を構成する細胞のうち心筋細胞は 3 割程度で他は線維芽細胞や血管などであり，活動電位は心筋細胞を伝播し，他の場所では拡散的に伝播したり絶縁的になっている．このように心筋組織は均一な組織ではなく至る所を大小様々な血管が張りめぐり，細胞間結合の欠陥があちこちに存在する．そのような伝導性の欠陥（以後，障害物と呼ぶ）はいくつかの効果をもつ．一つは回転ラセン

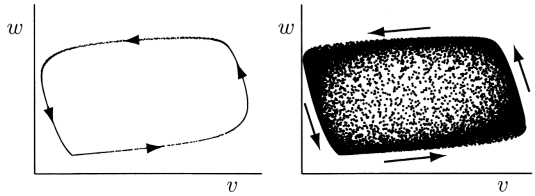


図 3 平面波と回転ラセン波の膜電位 v とチャネル変数 w で張られる相平面への写像．左図と右図の始域はそれぞれ図 2 (a) の平面波と図 2 (d) の回転ラセン波．各点は矢印の方向に時間発展する．

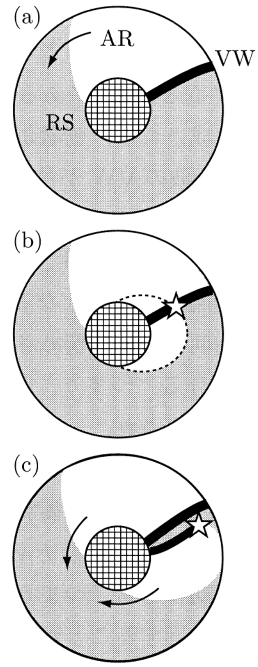


図 4 ピン留めされた回転ラセン波のピン留め解消過程．(a) 伝導性のない円形の障害物（網目模様）にピン留めされた左回転の波．(b) 電場をかけると仮想電極効果により興奮が誘導される（破線で囲んだ領域）．破線と VW の交点（星印）が波の端点となる．(c) 元の波と誘起された波は障害物に沿って矢印の方向に伝播し，一方，星印で示した端点は障害物から離れる．

波のピン留めである．

通常の拍動状態の興奮過程を膜電位と代表的なイオンチャネル変数で張られる相空間でみると，一回の興奮についてある安定な軌道を一周する（図 3 左）．一方，回転ラセン波が出現している場合，回転の中心には興奮サイクルのすべての位相が集中し位相が定義できない位相特異点があり，そこを含む周辺組織が示す相空間での軌道のアンサンブルは安定な興奮軌道の内側を埋め尽くす（図 3 右）．つまり周辺の組織は安定な興奮の軌道から特異点により強制的にずらされている．回転ラセン波はその回転周期の短さと上記のトポロジカルな性質により系全体を引き込んで支配するが，相空間における軌道としては不安定である．そのため，回転の中心は系の境界部分に衝突すると吸収されて消滅する．障害物も同様にラセンの中心がぶつかると特異点は吸収されて消滅するが，障害物の周りを興奮波はぐるぐると安定して回転し続け，機能的には安定な回転ラセン波となってしまう．トポロジカルチャージの文脈では，$q = \pm 1$ の値をもつ回転ラセン波である．この回転ラセン波の安定化は**ピン留め**と呼ばれる．

障害物は電場をかけると以下に示すようなメカニズムによって電極のような効果を示す．心筋組織に電場をかけると，それにより細胞内と細胞外にイオン電流が発生する．細胞外の電気伝導率は場所によらずほぼ一定であるが，細胞内の伝導率は細胞の形状や細胞間結合，特に上述の障害物のところで大きく変化する．そのような伝導率の変化があった場合，細胞内外のイオン電流がどのように振る舞うかを考える．いまイオンの通り道としては細胞内外の 2 つのコースがあり，その間がチャネルを通じた膜でつながれている．細胞内に障害物があるとイオンの流れはそれを避けるために細胞外に膜電流として流出する．また障害物を過ぎると細胞内のコースが開いているため膜電流として細胞内に流入する．つまり障害物の前後で膜電位の過分極と脱分極が起きる．あたかも電極があるかのように振る舞うため，仮想電極と呼ばれる．この効果を用いると，非常に弱い電場をかけただけで，ピン留めされた回転ラセン波の中心に電気刺激を与えることができ，ピン留めを外すことができる．そのメカニズムは上述のラセンの対消滅と原理的には同じであるが，ここでは図を用いて説明する．中心にある障害物に左回転の回転波がピン留めされている（図 4 (a)）．電場を図

の水平方向右向きにかけると，点線で囲まれた部分でイオン電流の細胞内流入による脱分極が起こる（図 4(b)）．すると，RS にある領域が興奮し新たに興奮波が生成される．刺激が仮想電極効果の脱分極領域に回転波の VW が存在する期間に与えられると，図のように VW の場所が新たな興奮の尾部となる．そのため，星印で示した興奮領域と VW の交点は回転波の中心となる．その反対側に着目すると，右回転のピン留めされた回転波になっていることが分る．つまり，刺激により ±1 のチャージの対が生成され，一方はすでにピン留めされている．そのピン留めされた波は元の回転波と逆回転であるため，互いに衝突し，消滅する（図 4(c)）．一方の星印で示したチャージは元の波の興奮からの回復期にある．つまり，興奮性が低いためにすぐには旋回することができず，外側に向かって進行する．このまま，組織の端まで到達し，消滅する場合もある．このように，心筋組織に発生した回転ラセン波は障害物にピン留めされることで安定化するが，逆に障害物を利用することで弱い電場により回転ラセン波を消滅させることができる．

ここでは，心筋組織の非一様性の効果を定性的に説明したが，次節では電場をかけた際にどの程度の効果があるかを膜電位の伝播方程式を解析することで定量的に見てみる．

5. 微弱な電気ショックによる興奮誘導

まずは伝導性のない障害物の効果，次に細胞配向の不均一性の効果を調べてみよう．細胞組織の不均一性や異方性を取り入れるために，細胞外電位 ϕ_e と細胞内電位 ϕ_i の時間発展を記述するバイドメインモデル[2)]を用いる．

$$\nabla \cdot \sigma_i \nabla \phi_i = \beta \left[C \frac{\partial}{\partial t}(\phi_i - \phi_e) + I_{\mathrm{ion}} \right], \quad (14)$$

$$\nabla \cdot \sigma_e \nabla \phi_e = -\beta \left[C \frac{\partial}{\partial t}(\phi_i - \phi_e) + I_{\mathrm{ion}} \right]. \quad (15)$$

ここで，σ_i と σ_e は細胞内と細胞外の伝導率テンソル，β は細胞の体積と表面積の比，C は細胞膜の単位体積当りの電気容量，I_{ion} は各イオンチャネルを通じて膜を透過するイオン電流である．これらの式の左辺は細胞内外を各領域の空間的な電位差に従って流れる電流を表し，右辺は膜電流を表す．

外部電場による受動的な膜電位の変化を調べるため，静止電位付近での膜電位変化が定常状態に至った場合の解析をする．すると，イオン電流は静止電位付近の膜伝導率 G を用いて線形近似でき $I_{\mathrm{ion}} = G(V - V_r)$ と書ける．ここで $V = \phi_i - \phi_e$ は膜電位であり，V_r は静止電位である．これを式 (14)，(15) に代入し，定常状態であることを考慮すると，

$$\nabla \cdot \sigma_e \nabla \phi_e = -\beta G (V - V_r), \quad (16)$$

$$\nabla \cdot ((\sigma_i + \sigma_e) \nabla \phi_e + \sigma_i \nabla V) = 0 \quad (17)$$

となる．では，半径 R の円形の障害物を考えて，その周辺の膜電位の変化を調べよう．障害物の所には心筋細胞はなく，伝導性もないとする．つまり，円内では $\sigma_i = 0$ と $G = 0$ である．ここで簡単のためこのような障害物以外の部分は一様で等方的な組織であるとすると $\sigma_{i,e}$ はスカラー量となり，膜電位のみの変化を表すモノドメイン方程式に落とすことができる．すると，$v = V - V_r$ とおいて

$$\nabla^2 v = -\frac{v}{\lambda^2} \quad (18)$$

となる．ここで，$\lambda = \sqrt{\sigma_e \sigma_i / (\sigma_e + \sigma_i) \beta G}$ は長さの単位をもち，受動的な膜電位変化の到達距離を特徴づける．これに現実的な値，$\sigma_e = \sigma_i = 3.75\,\mathrm{mS/cm}$, $G = 1.65\,\mathrm{mS/cm^2}$ $\beta = 2000\,\mathrm{cm^{-1}}$ を代入すると $\lambda \sim 1\,\mathrm{mm}$ である．1 次元の場合は外部電場による受動的な膜電位の変化が障害物から 1 mm で指数関数的に減少することが分る．今考えている円形の障害物の表面では法線方向の電流が 0 であるため，x 軸に平行に外部電場 E をかけた場合の障害物表面での境界条件は障害物の中心を原点とする極座標 (r, θ) を用いて，

$$\frac{\partial}{\partial r} v(R, \theta) + E \cos\theta = 0 \quad (19)$$

と表される．これは解の形が $v=v(r)\cos\theta$ であることを意味する．このことから式 (18) は極座標に変換してベッセル方程式

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial e}{\partial r}-\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{\lambda^2}\right)e=0 \qquad (20)$$

となり，膜電位の分布は

$$v(r,\theta)=-\frac{K_1(r/\lambda)}{K_1'(R/\lambda)}\lambda E\cos\theta \qquad (21)$$

となることが分る．ここで，$K_\nu(x)$ は第二種変形ベッセル関数である．これは単調減少関数であり，$v(r,\theta)$ は障害物の表面 $r=R$ で最大値を取る．$\cos\theta$ の項があることから，障害物をはさんで電場に平行な方向に脱分極と過分極（つまり障害物の両側が $+$ と $-$ に帯電するように見える）が起きることがわかる．そのため障害物の仮想電極効果と呼ばれている．電位変化の最大値は障害物の半径 R の増加関数で，R の増加とともに飽和し，おおよそ λ の 10 倍以上つまり半径約 1 cm 以上の障害物では $\sim\lambda E$ になる．興奮の閾値が 30 mV の膜電位上昇だとすると，0.3 V/cm 以上の電場をかけると障害物周辺の組織を興奮させることができる．ただし，$R=\lambda$ と小さい障害物であっても表面での膜電位上昇は最大で $\sim 0.6\lambda E$ であり，半径 1 mm の障害物でも 0.5 V/cm 程度の弱い電場で興奮させることができる．

6. モデルと現実の心臓

実際の心筋組織では細長い心筋細胞が配向して連なっており，細胞の長軸に対して平行方向と垂直方向の伝導率には数倍から 10 倍程度の差がある．一方，細胞の外の伝導率はほぼ等方的と見なせる．このように細胞内外で異方性が異なる場合，細胞内外および方向で電位の減衰距離が異なるため複雑な膜電位分布を示す．今扱っている障害物の場合，障害物前後で正負に分極する双極子分布だけでなく，高次の項として六重極子分布が重なる[3]．しかし，この高次の項の寄与は小さく，興奮閾値程度の電場をかけた場合は膜電位の時間発展には影響を与えない．

一方，上述したように電場による膜電位の変化は細胞内の伝導率の局所的な変化によって起き，細胞の配向の変化があれば伝導率の変化があるため電場をかけると膜電流が発生する．その際，局所的な細胞配向の不均一性により興奮がどの程度起きるかを見てみよう．2 次元の心筋組織があり，細胞の配向はある角度の幅 $\Delta\Phi$ をもって分布しているとする．距離 d 離れた電極で組織を挟み電場をかける．すると細胞内の電気伝導率の不均一性により膜電流が発生する．細胞膜表面の電場は保存するため，式 (16) は

$$-\sigma_e E_0(\Delta\Phi)=-\frac{1}{d}\oint_S(\beta Gv+I_e)dA \quad (22)$$

となる．ここで E_0 は細胞配列の分布幅が $\Delta\Phi$ の時に興奮に必要な最低限の電場であり，I_e は外部電場により細胞外に注入された電流である．これを単位面積 $A_0=1\mathrm{cm}^2$ について積分すると，細胞外の電気伝導度が等方的であることから式 (22) は，

$$\sigma_e\left(\frac{I_eA_0}{\sigma_e d}-E_0\right)=-\beta GvA_0d^{-1} \qquad (23)$$

となる．ここで，

$$E=\frac{I_eA_0}{\sigma_e d} \qquad (24)$$

は組織に印加した電場である．ここで，$I_e<0$ のときに膜電位は脱分極，つまり $v>0$ となることに注意しておく．さて電場 E をかけた際に単位面積内で興奮の起きる確率は，組織が示す平均の膜電位 v と興奮閾値 v_c の比 v/v_c に関係する．すると式 (23) より，単位面積について膜興奮の起きる確率 p は

$$p=p_0\exp\left(\frac{E_0-E}{\kappa}\right) \qquad (25)$$

で表される．ここで，

$$\kappa=\frac{\beta Gv_cA_0}{\sigma_e d} \qquad (26)$$

である．印加する電場を強くするに従い，細胞配向の不均一性に起因する膜興奮の起きる場所が指数関数的に増加することは，新生仔ラット由来の

培養心筋細胞系でも確かめられており，この場合には約 2 V/cm の電場により組織のほとんどの場所で興奮が誘導される[5]．これは現在除細動に用いられている 10 V/cm という電場より十分小さいことに注意しておく．

7. おわりに

本稿では，心臓にとって好ましくない回転ラセン波を消滅させる方法を紹介した．ここで示したように，障害物の性質と回転ラセン波の受攻期 (VW) をうまく利用すると，ピン留めされて安定化した回転波を障害物から容易に外すことができる．こうなると埋め込み型除細動が用いる抗頻脈ページングという方法でラセン波のドリフトを誘導することができ，心筋組織の端に衝突させて消滅させることができる[6]．実はこのページングの原理について従来は "複数回与えた刺激の一つがラセンの受攻期に入ると消滅する" との誤解が広まっていた．しかし，その説明ではラセンの中心にアプローチできないため，3 節で述べた対消滅の起きる確率は極めて低い[3]．1 節で述べたように実際の医療現場で使われている除細動器および埋め込み型除細動器は歴史的には主にヒューリスティックアプローチにより開発，改良されていた．そのため，メカニズムについての誤解も生じている．現在，物理や数学的な解析による研究を進んできたことで，心筋組織の不均一性の効果などが明確になってきた．このような理論的な方法を用いることで，より効率のよい除細動方法が見つかると期待される．上記で紹介した微弱なエネルギーの電気ショックによる興奮誘導のメカニズムは培養心筋系[5]だけでなく，実際の心臓で効果的で適用可能であることが最近示された[7]．今後はこの効果をどのように効率よく用いるか，その方法を考えることが今後の課題だろう．非線形の数理と，臨床研究の双方を発展させることにより，より安全で効率的な救命法へと進化させることは喫緊の課題となっている．

参考文献

1) J.J. Tyson and J.P. Keener: "Singular Perturbation Theory of Traveling Waves in Excitable Media", *Physica D* **327** (1988) 327–361.
2) B.J. Roth and J.P. Wikswo Jr.: "A Bidomain Model for the Extracellular Potential and Magnetic Field of Cardiac Tissue" *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **33** (1986) 467–469.
3) S. Takagi, *et al.*: "A physical approach to remove anatomical reentries: a bidomain study", *J. Theor. Biol.* **230** (2004) 489–497.
4) M. Hörning, A. Isomura, K. Agladze and K. Yoshikawa: "Liberation of a pinned spiral wave by a single stimulus in excitable media", *Phys. Rev. E* **79** (2009) 026218.
5) M. Hörning, *et al.*, "Controlling Activation Site Density by Low-Energy Far-Field Stimulation in Cardiac Tissue" 投稿中.
6) G. Georg, *et al.*: "Spiral wave drift induced by stimulating wave trains" *Chaos* **11** (2001) 487–494.
7) S. Luther, *et al.*: "Low-energy control of electrical turbulence in the heart", *Nature* **475** (2011) 235–239.

（マルセル・ホールニング，京都大学大学院理学研究科）
（たかぎ・せいじ，北海道大学電子科学研究所）

対談：非線形の魅力を語る

蔵本 由紀・吉川 研一・栗村 朋

1970年代の非線形科学の勃興期を振り返り，現代の到達点，さらには今後の学問の展望を探る目的で，蔵本・吉川と，修士課程の学生の栗村の3名で，対談の機会を持ちました．意外な逸話も飛び出しています．気軽にお読み下さい．

1. “非線形”との出会い

栗村：それでは，よろしくお願い致します．まず，蔵本先生がこの分野の研究を始められたきっかけをお聞かせいただけますでしょうか．

蔵本：私が大学院に入ったのは1964年だったのですが，その頃から“非線形”という言葉は聞いていました．物性理論の研究室に入ったのですが，8年先輩の助手の方が「“非線形”というのは将来きっと面白くなるよ」と言っていたのを覚えています．

そもそも“非線形”って何か．当時ははっきり分かっておらず，何となく面白そうだなと感じた程度で，実際の研究とも別だったわけですが，研究室の冨田和久先生が早くから非線形に興味をもっておられたので，研究の傍ら，将来に備えて非線形関係の文献を研究室のメンバーと一緒に読んでいたんですね．H. Hakenのレーザー理論の論文などがプレプリントで研究室に送られてくるようになっていました．

それ以外にも，H. Suhlという磁性理論で有名な人がいるんですが，その人の1957年頃の仕事としてスール不安定性という現象が知られていて，磁気共鳴でマイクロ波のパワーを上げていくと，吸収があるところで完全に飽和してしまうんですね．吸収はスピンの歳差運動によるわけですが，その吸収エネルギーが磁性の空間的なゆらぎであるスピン波に突如流れはじめるためにこれが起こるわけです．これによって特定のスピン波が突然増幅するわけで，これは面白いなと当時感動しました．要するにこれは，非平衡開放系での一種の分岐現象なんです．

吉川：レーザーはまさに非線形現象そのものですが，当時その辺は蔵本さんの興味とは必ずしもつながっていなかったのですか．

蔵本：その当時は本来の研究とは独立したものとしてやっていましたから，面白いなあと思いつつも実際の研究に反映されたわけではありません．

私の学位論文など相転移の完全にスタティックな問題に関するもので，現象論的なL. Landauの自由エネルギーから，臨界ゆらぎについていわゆるスケーリング理論とその後現われたK. Wilsonの繰り込み群理論との間の橋渡し的な話をやっていたことになります．

吉川：それでも当時としては最先端ですよね．ランダウ流の考え方自体も統計力学では斬新なものですからね．

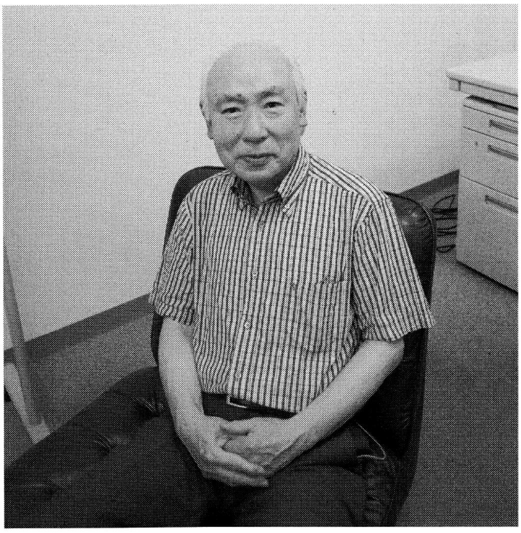
蔵本：そうですね．しかし，研究室ではダイナミックな研究をしていたのに，私はスタティックなことのほうに興味があったようです．

2. “非線形”が世界的に広がりを見せた時期

蔵本：大学院を出る頃にHakenの論文が送られてくるようになったと言いましたが，それから数年は自分の方向が定まらずに鬱々としていた時期でした．その頃から，国内外で同時的に“非線形”に対する興味が出てきたように思います．

日本では，とくに非平衡統計力学では伝統的に，久保亮五先生をはじめ偉大な人物を輩出しています．

吉川：そうですね．線形非平衡の研究に関しては，世界の中でも，日本人研究者の存在感は大きなものがありますよね．



蔵本由紀氏.

蔵本：それで，“非線形”でも日本から世界をリードするような仕事を，という意気込みで，私のひと回りもふた回りも年長の統計力学のリーダーたち，たとえば森肇先生や松原武生先生といった方たちのリーダーシップで，“非線形非平衡統計力学”の研究会やミーティングが開かれて，私たちは当時ずいぶん刺激を受けました．それが70年代初めの頃でした．

それはもちろん，基本的な方向としては正しかったんだけれども，統計力学という一つの縛りがあったことが問題といえば問題でした．統計力学なのでどうしても“ゆらぎ”とか“確率”と関係していますが，そういうものを抜きにした“非線形”は，なかなかイメージしにくかったんですね．

一方で，その頃に統計力学の国際会議があって，確か71年のシカゴだったと思います．その会議にはI. Prigogineなど統計力学の大家もいましたが，数学者のS. SmaleやRené F. Thomといった，通常の統計力学とは関係のない力学系理論の数学者たちも来ていたんですね．だから，欧米は日本より一歩進んでいたと言えるかもしれません．

吉川：そうですね．私は1971年に大学院に入ったんですが，そのときはまだ統計力学と非線形というのは必ずしも繋がらない言葉で，むしろ数学の用語としての“非線形”はあったと思います．

蔵本：私は物理出身の立場から非線形の世界に入ったのですが，そのために統計力学との深い因縁みたいなものがありました．だけどやがてカオス理論の波が押し寄せてくると，ゆらぎや確率にも見向きもしない決定論のほうにどっと流れてしまうんですね．散逸力学系にもとづく非線形現象の世界ですね．

吉川：それとやはりもう一つ大きな流れは保存系ですよね．保存系でも非常に面白いことが70年代に出ました．

蔵本：保存系も重要だと思いますが，私自身について言えば，Glansdorff–Prigogineの71年の本に影響されたこともあって，散逸系にもっぱら関心がありました．熱力学の第二法則に従って秩序はだんだん崩壊していくのが普通と考えられるのに，一方では秩序が形成されていくという，そういう自己組織化的現象を今までの物理ではまともに扱ってきていないではないか，そんなメッセージをその本に見出してとても刺激を受けました．

3. いろいろな考えのルーツ

蔵本：私は，ゆらぎや確率よりも，当時Belousov–Zhabotinsky反応などで見出されていた面白いパターン形成現象をみて，それらを決定論的力学で理解できるはずだと思って，そちらのほうに興味がシフトしていったんですね．当時としては異端とまでは行かなくとも少数派だったと思います．

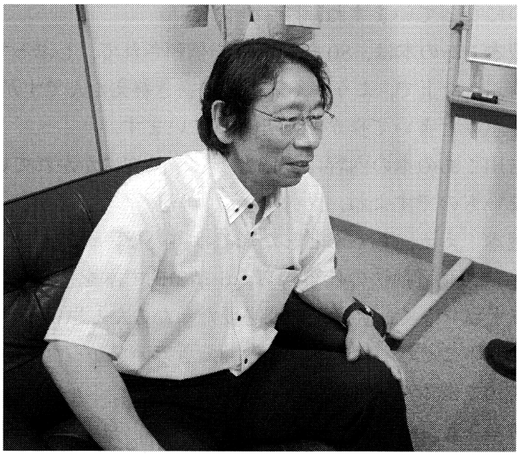
吉川：非線形では，蔵本さんの名前を冠した方程式がいくつもありますが，最初の論文はどんなものだったのですか．

私には，蔵本さんの執筆されたシュプリンガーの本（『Chemical Oscillators, Waves, and Turbulances』，1984）がもっとも印象に残っていますが．

蔵本：最初の論文は，化学反応のゆらぎの話だったと思います．私も最初はやはりゆらぎにこだわっていったんですね．ブリュッセルのG. Nicolisらが扱っていた反応系の確率モデルがあるのですが，そのモデルを解析して非平衡定常系でのゆらぎの特性を調べてみたんですね．73年頃だったと思います．

吉川：しかし，化学反応に統計力学の研究者が入るということ自体が，当時の雰囲気を考えると勇気がいったと思うんですよね．

蔵本：そうですね．ただ，先ほど述べたGlansdorff–Prigogineの教科書で同様の問題はある程度議論されていましたからね．私も2次相転移の臨界ゆらぎの問題をそれ以前にやっていましたので，その問題に特に興味をもったように思います．



吉川研一氏.

吉川：私がそれを初めてみたのは，岩波の「科学」に冨田先生の解説で，非平衡状態のときにゆらぎの循環量が現われるといった話で，当時それを読んでとても感動したのを覚えています.

蔵本：ゆらぎの不可逆循環の話ですね．あれは綺麗な理論です．私は当時九大にいましたので直接は関係していませんでしたが.

しかしその後は結局決定論に入っていって，74年の逓減摂動法の仕事に移っていきます.

吉川：蔵本さんがされたこの摂動法は，時間軸が入った摂動で非常に良い仕事だと思うのですが，あの流れは蔵本さん以前に何かあるのですか.

蔵本：あれは流体力学にその手法があるんですね．A. Newell と J. Whitehead の Bénard 対流の論文 (1969) が手本でした．流体のほうではその手法の長い歴史があるんです.

Navier–Stokes 方程式を Bénard 対流の発生の近傍で縮約して，Ginzburg–Landau タイプの方程式を出しているんですが，私は都築俊夫さんと共にそれを反応拡散に転用してみました.

吉川：なるほど，そういう経緯でヒントを得られたわけですか．Navier–Stokes は散逸が入った系ですから，ある意味では共通するものがありますね.

これは，私は蔵本さんにとって重要な仕事だと思っていて，後の縮約の概念もこれがルーツではないかと思っているんです.

蔵本：現在では center-manifold reduction (中心多様体縮約法) と呼ばれていますが，当時はこの用語がまだありませんでしたから，谷口俊弥さんたちがソリトン方程式の導出に使っていた方法を reductive-perturbation (逓減摂動法) と呼んでいたので，それを借用させてもらったんです.

ソリトンでは非散逸系ですからそれとは縮約の考えも違うのですが，結局，複雑で個別的な偏微分方程式系をユニバーサルで単純な偏微分方程式に近似的に変換するという意味では同様です.

吉川：あれは美しいなと思いました．どうしたらこういう発想が出るのかなと思いましたが，そういった歴史があったんですね.

4. 何が役に立ったか——スタンダードな物理と数学を学ぶことの大切さ

蔵本：それは多分相転移理論をやっていたことが役に立ったのかもしれません．不安定が起こるところでは，ごく少数の自由度だけでシステムの特徴を記述できるのだという考えは当時ずっと持っていましたから.

吉川：その場合も，大体の研究者は，緩和を記述するのに複数の指数関数の重ね合わせに落とし込んでいましたよね.

蔵本：臨界点近傍で自由度が減ってダイナミクスが簡単になるという考えは，すでに Haken がレーザー理論を作るときにも使っているんですね．その無意識の記憶が活きたのかもしれません.

決定論の世界に入ると，統計力学とか通常の学部で習う物理とか，それまで一生懸命勉強してきたことがまるで役に立たないわけですよ．偏微分方程式も学部のときろくに勉強しておらず，何も道具を持たずに徒手空拳で挑んだわけですが，それは若かったからできたことなのだと思います.

年をとって一定の蓄積ができてくると，それが全く使えないような領域に飛び込むというのはまず無理ですね.

吉川：そうですね．70年代に岩波から出た統計物理のシリーズには，非平衡のことなんて全くありませんでしたからね．あの当時の学生は，あの本をマスターするのが目標でしたからね.

蔵本：グリーン関数を用いた計算法なども一生懸命勉強しましたが，何も役に立たなかったわけです.

栗村：今でも学部では，線形や保存系が普通で，あまり非線形とか非平衡はやらないと思います.

蔵本：それほど早くからやる必要はないと思います．学部のときはスタンダードな物理や数学をしっかりやっ



栗村朋氏.

ておくのが，直接は役に立たなくても，論理的な思考力とか，いわば基礎体力のようなものを身につけておくという意味で，将来何をやるにしてもよいと思います．徒手空拳と言いましたが，そういうバックグラウンドが曲がりなりにも自分にあったから転身できたのだと思います．

吉川：そういう点では，蔵本さんは上手に数学（コト）と物理（モノ）の両方をうまくバランスをとって新分野を築かれていますよね．

物理の学生は数学的なセンスを磨く上で，とくに学部時代は線形代数や偏微分などきちんと解ける問題をやってみて，そのときに「線形だから解けたけど，こういう付加項があったら何か変な事が起こるかもわからないぞ」と，そういったような発想を鍛えておくといいのかもしれませんね．

蔵本：そうかもしれません．最近は決定論を経由した上で統計力学に回帰している流れがありますが，当時としては統計力学的意味あいを払拭して前進することが正解だったように思います．

最近の非線形の話はメゾスコピックな領域にも広がっていますから，もう一度ゆらぎとか確率とかを真剣に考え直すということはごく自然であり重要なことなんだと思います．

5. シュプリンガーの本と論文について

吉川：ところで，シュプリンガーから蔵本さんが出された『Chemical Oscillators, Waves, and Turbulance』(1984) は，物理でも “Chemical” と名のついた非常に印象的な本ですが，あの本の内容はとても豊かなものになっていますね．

蔵本：あの本は，80 年に執筆を依頼されて，しぶってしぶった上で，ようやく 4 年後に書き終えたんですが，今思うと書いて良かったと思っています．

吉川：あの本の内容は，ほとんどが論文にかかれていないものですよね．

蔵本：ええ，ちゃんとした形では書いていません．74 年の逓減摂動法の仕事から，6 年の間で本を書く力はまだ私になく，もう 4 年間必要だったのだと思います．私の中にそれだけのものが準備できていなかったです．

吉川：蔵本モデルは論文に出ていますか．

蔵本：2 頁ほどの短いものがあります．京大で数理解析研のシンポジウムのプロシーディングスに出ています．何も書かないよりはいいと思って書いたのですが，粗いタイプ打ちの 2 頁ですので，内容を理解せよというのが無理です（笑）．

吉川：あの仕事のスタイルも私たちには非常に参考になります．必ずしも蔵本さんは論文が多いほうでありませんよね．

蔵本：ええ，少ないと思います．

吉川：それでも，非線形の分野では国際的にも新しい学問をつくられたという評価があります．どうしても若い人は業績に追われて，流行を追って論文の数を稼ぐといった傾向が強いですからね．

蔵本：私の助手時代は，コンピュータの世話に振り回されるわけでもないし，演習などの義務もあまりなく，申し訳ないほど楽な助手で研究に打ち込めたと思いますね．

6. どんな学生だったか

栗村：先ほど学部時代のことで役に立ったことをお聞かせいただきましたが，先生はどんな学生だったのでしょうか．

蔵本：私はすごく不出来な学生で，教養課程の力学の単位を落としたりして，せっかく理学部に入ったのに物理や数学に興味を持てず，附属図書館で文系の本ばかり読みあさったりして，物理に興味をもてるようになってきたのは 3 回生になってからでしたね．

当時京大では 3 回生に上がる時点で分属試験があって，私は何となく物理学科に進みたいと思ったのですが，競争率が高かったので一生懸命勉強したんですね．強いられてやる勉強でも一生懸命にやれば興味が出てくるものだなと思いました．

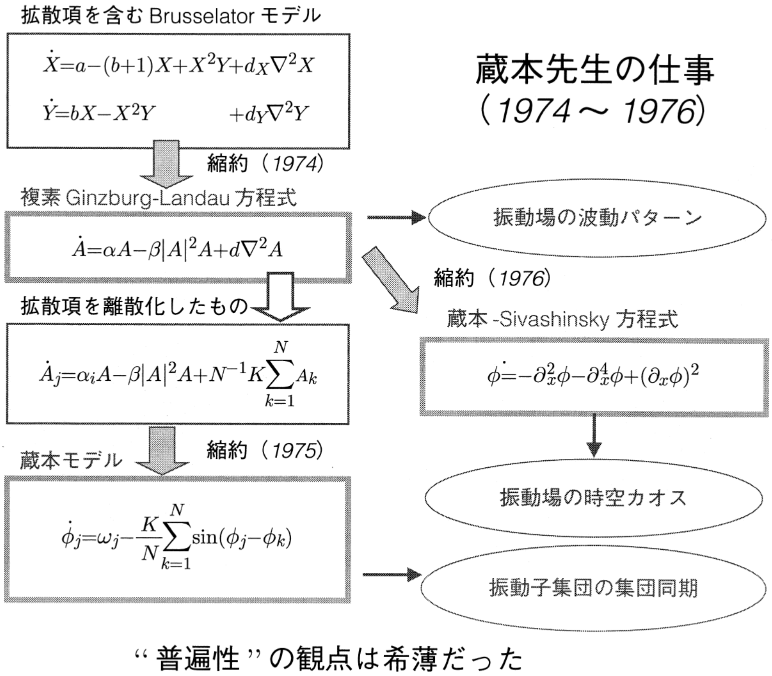


図 1

それと，学部では教養部と違って講義をされる先生方も生き生きとしていて，研究しながら教えるというのはやはり違うんだなと思いました．そういう生き生きした雰囲気に触発されて，だんだん物理が好きになったと思います．

吉川：当時は，素粒子論こそが物理の王様だという雰囲気がありましたよね．そこで，あえて統計力学のほうに行った理由は何だったのでしょうか．

蔵本：湯川先生の講義が一つのきっかけだったかもしれません．湯川先生は素粒子論の現状に批判的な考えをもっておられたようでした．講義の中で，とくにエントロピーとか統計力学の話が非常に印象的でした．素粒子の先生がおっしゃるのだから…というような思いがあったんだと思います．

吉川：湯川先生の講義の中では，非線形のような話はなかったですか．

蔵本：それはありませんでしたね．ただ統計力学の話は非常に面白く，その先に非線形があるわけですね．

栗村：湯川先生の話術に惹かれて，統計力学に興味をもたれていったんですね．

蔵本：湯川先生の講義は生徒にサービスをするといった感じのものではなくて，ご自分のペースで訥々と進められていましたね．

以前三村昌泰さんから，彼の先生だった山口昌哉先生の講義話を聞いたことがあるのですが，黒板にご自分で書かれた数式をみて，「ほお，これは美しいねえ」としばし見入っておられたということです．

先生が「これは美しいなあ，面白いなあ」と言いながら，そういう雰囲気で自分のペースで講義を進めていくというのは，とても感化力が大きく，下手にサービスするよりも，よほど学生を学問に引き込んでいくんじゃないかと思いますね．

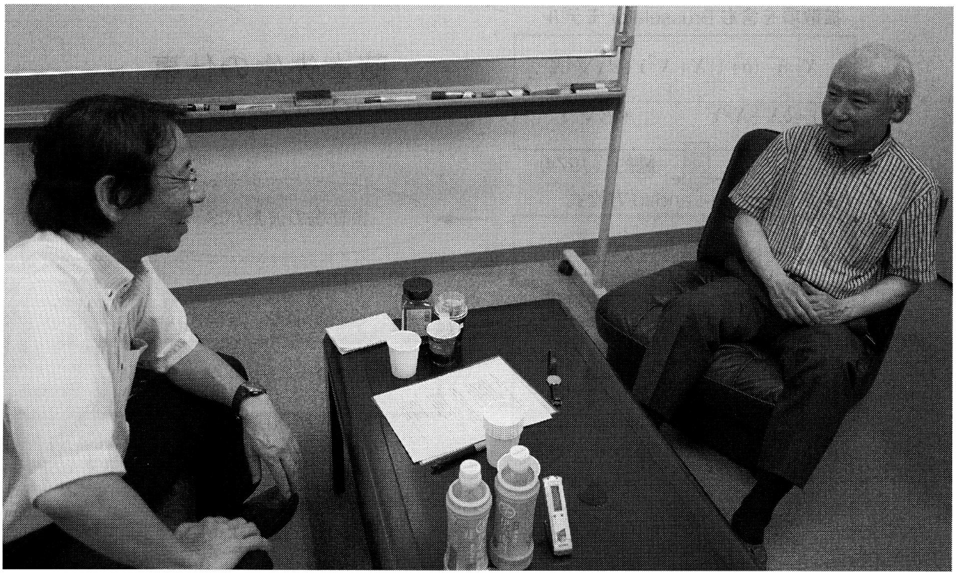
7.“非線形”を研究することになった動機

蔵本：ところで，吉川さんが非線形を始められたのはいつ頃ですか．

吉川：私は，京都大学の工学部で化学で学位をとったのが 76 年で，半年オーバードクターをして徳島大学の教養学部に移りました．

京都にいるときは，日本にただ 1 台しかない超伝導での核磁気共鳴の実験ができて，しかも幸いだったのは福井謙一先生の流れを汲む教室で，量子化学では世界でトップの研究室だったので，何でもすぐ論文になったんですよね（笑）．

徳島にいったら常伝導の核磁気共鳴もないわけです．



また，大型の計算機もない．という訳でこれ迄の研究をスパッとやめたんですね．それで，教育学部の小学校課程の学生たちの卒業研究として，ジャボチンスキー反応とか流体の不安定性といったことをやるようになりました（詳細は『物理の道しるべ』（サイエンス社）を参照）．

蔵本：なるほど．やはり最初からリズムを研究されたんですね．

吉川：蔵本さんは主体的に非線形に入られましたが，私の動機は不純で，流行の研究ができなくなったから非線形に入っていったような所がありました．

蔵本：物性というのはもう終わりに近いんじゃないかという雰囲気が当時はあって，大体主なところは先人にやられてしまっているし，学園紛争の影響もあって，それで私も転向したんですよね．

吉川：おそらく 70 年代前後の学園紛争は，私たちに影響を与えていて，流行を追うとか権威を信奉するということは何かおかしいことかもしれない，という雰囲気を与えられたと思いますよね．

蔵本：ええ，そういうのはたしかにありました．

8. 非線形科学とは何か

栗村：では，複雑系，カオス，非線形科学とは何かについてお聞かせいただけますか．

蔵本：私は統計力学から出発しましたので，非線形というと，まず第一に平衡状態から遠いという意味での非線形という認識でしたが，その後，非線形の概念が広がって，特にカオス理論が 70 年代中頃から出てくると，その意味での平衡・非平衡という考えは背景に退いていきました．例えば，ネットワークとかフラクタルとか，そういうものに平衡とか非平衡とかを云々するのは場違いですね．

だから，非線形科学の「非線形」とは何なのかと言うとき，数学的に表現すれば非線形になるような対象というだけでは面白くなくて，もう少し，何というか非線形システムと我々が呼ぶところのものの特徴づけから捉えていくのがよいのではないかと思います．

私自身の関心から言えば，それには 2 つの特徴があります．一つはいわゆる創発性と関係していて，要素的なモノや過程に分解できない，あるいは要素の詳しい知識をもっていても，そういうものの全体から創発する振舞い，新しい予想外の秩序やカタストロフィーは理解できない，そういうシステムを非線形システムと呼びたいと思います．

しかも，その創発性が要素の詳細な性質とは関係なく，ユニバーサルな性格をもっている．物理的に見ると要素は千差万別でも数学的には創発性は同一の形をとる，そういった特徴があると思います．このような意味でのユニバーサリティ概念の重要性は，近代の臨界現象の理論を通じて一般に認められるようになりました．非線形科学を通じて，その対象も概念も一挙に拡大したと思いますね．

それと，非線形系のもう一つの特徴として，カオス

力学系に関連して言われたことなのですが，「simple rule vs. complex behavior」ということがあると思います．つまり，支配法則自体は書き出してみれば1行で足りるようなシンプルなものであっても，それだけでは何も分かったことにはならなくて，そこからどんな複雑な事が出てくるかということは，とてもじゃないけど想像できない，そういうシステムこそ非線形システムと呼ぶべきものですね．

この2つの特徴というのは，科学全体の大きな流れから見ると，物理学を頂点とする自然科学がかかえている2つの大きな弱点に対応しているように思います．

万物理論という言葉がありますが，分析に分析を重ねて，ミクロの窮極にたどりついて，そこが分かると原理的に世の中が分かるというような，残るのは応用だけだというような，そういう極端な考えに2つの弱点は見事に現われていると思います．

吉川：そうですね．素粒子論を極めることが物理で一番重要なことだといった雰囲気ですよね．

蔵本：運動法則がわかったら原理的にわかるというけれど，Navier–Stokes方程式が分かったって，流体の森羅万象がわかったことには全然なりませんよね．

9. 非線形科学の未来

栗村：今後の非線形現象の科学はどのような方向に向かっていくと思いますか．

蔵本：それは難しい質問ですね．非線形科学に限らず，将来の見通しというのは，とかく現在の延長でしか考えないですね．本当に新しい事というのは別次元からやってくるもので，今の我々が乗っかっている次元の延長線上であるビジョンを持ってしまうとかえってそれが拘束になってしまうおそれがあります．だから，新しいことが起こってもそれを受け入れられるくらい，もっとオープンな気持ちを持っていることのほうがむしろ重要ではないかと思います．

それと，多くの若い研究者がよくもつ感覚として，今自分のやっている分野はすでに新鮮味がなくなっていて，大体重要なことはやられてしまっているという思いがあるのではないかと思うんですが，実はいつの時代でも現存の分野は終りに近く見えるというのが事実に近いんですね．

新しい事というのは，いつ突如として出てくるか分からない．非線形の分野でも，何年か毎に新しいパラダイムは出てきていて，一昔前はカオスやフラクタル，より最近は複雑ネットワーク理論など出てきましたよね．しかし，それらの出現は予想できないもので，そんなことがあるとは夢にも思っていなくて，だけどそういうものが出てきたときにすっと受け入れられることが重要だと思います．あるいは，次の新しいパラダイムはもう誰かが密かに手をつけていると思ってほぼ間違いない．

吉川：先ほど言ったことと関連していますが，統計力学という学問自体，時間軸を止め，“詳細つりあい”を仮定して，非常に綺麗な体系がつくられました．今の学生もそこから学んでいきますから，どうしても時間軸がとまった所で発想してしまうわけです．

蔵本さんが言われたように，全く予想外の発展がまだまだこれから出てくると私も思っています．

地球ということ自体，宇宙そのものも非平衡開放系ですから，地球上で起こっている物理の現象，一番わかりやすいのは生物のあらゆる現象，例えばなぜ1次元のDNAの紐の現象から時空間4次元で自己発展しているのかといった，そういうことの中に，未発見の基本原理がまだまだあるように感じています．

蔵本：わかってみたらすごく簡単なことというのがまだたくさんあると私も思います．密かに誰かが手をつけていて，そういうものをいち早く公の場に持ち出す人が，次の時代のヒーローになるんじゃないかと思いますね．

10. 生物と数理物理について

吉川：生物に関連しますが，今の若い世代には非常にいい時代になったなと私は思っていて，ここ二三十年の生物学というのはいわば部品論なわけですが，今はその部品の知識が進んできて，物理がそれを統一して一般的な議論ができるようになってきました．

過去二三十年は分子生物学が大全盛で，ストラクチャー・バイオロジーというのが流行って，これは1次元のアミノ酸配列から3次元のタンパク質を考えて機能を調べるという学問なのですが，これらの研究が進んできたことが大きな追い風になっていると思います．

部品の知識がないのにシステムを論じても足元はふらつきますが，今やたくさんの生命科学者が一生懸命働いて部品の知識を出してくれていますから，それによって非平衡開放系のシステムがどう働いているかを，数理物理的にアプローチすることは歴史的にも必然な流れです．

蔵本：そうですね．そういう仕事はどんどん出てきてますよね．

吉川：それと，いきなり若いときから生物の部品論をやってしまうと，後で数理物理の基本的な考え方を学ぼうとしても，学問の性質上なかなか理解できません．むしろ，タンパク質がどういう構造をしているかといったことは，インターネットでも今では調べることができるわけですね．

ですので，若いときに数理物理を勉強して，大学院に入ってからは，生物などのたくさんの百科事典的な知識を援用しながら一般論を組み立てる…といった，そういう楽しい学問ができる時代が来たのではないかと私は思っています．

蔵本：数理的な方法にしても，わからなくても学部時代に一通り勉強しておくことは重要だと思います．後で勉強し直すときに，一度やっておくと習得が早いですよね．

吉川：コアとなる数学的なセンスは，40代50代になってやっても理解するのが難しいと思いますね．

フランスでは文系も含めて数学をやらせていますが，我々からみると，学問の本来の姿として数学・物理はコアだと，もっと主張していいんじゃないかと思います．

11. 非線形科学と人生経験

蔵本：物理というのは自然科学の基礎ですから，その基礎を修得したという経験は，自然の根底を握っているというような無意識の自信になると思いますね．その自信がその後の人生の転身を軽やかにするんですよね．

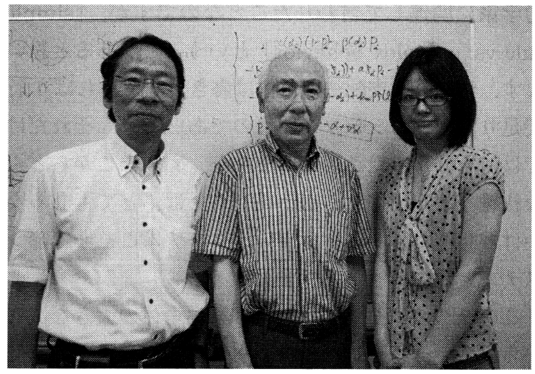
吉川：そうですね．物理をやったら経済学もできますからね．

非線形というキーワードで物理をやることが，必然的に哲学とか文系の人と共通の人間の学問全体に渡っていきますから，大局的にここまでいけば経済が破綻するとか，地震がどういうときに起こるとか，混沌としたように見える現象であっても非線形の数理科学を応用することで，ある程度の予測をすることはできるようになるでしょうね．

蔵本：非線形をやることで，いろんな違った分野の人と交流することができます．

企業の経営者の集まりで，非線形について話す機会がありましたが，全く数式なしに言葉で非線形の考え方を話すだけで共感をもってもらえました．

栗村：そういう式を使わないような非線形科学の話を，



高校生のときや大学初年度に聞けたら良かったなと私は思います．

蔵本：以前，高校生に非線形の話をしたことがあるのですが，実は反応があまりよくなかったんですね．むしろ経営者の方のほうが反応が良いんです．なぜだろうと考えたのですが，人生経験を積んできた人は，非常に苦労して現実問題に突き当たっていろいろ考えて来られているので，新しい考え方というものにすごく好奇心があると思うんですね．高校生にはそういう経験がまだ少ないということなのかなと．

栗村：身近なことというのは意外と非線形で，今まで高校で習ってきた物理や数学では説明できないことが多いですが，あまりガチガチに勉強してしまうと，昔から疑問に思ってきたことも頭から消えてしまって，大学に入っていざ研究の段階にきて柔軟な発想をしろと言われてもなかなかできないんですよね（笑）．

蔵本：なるほど，ナイーブな発想が知識の獲得と引き換えに失われる．誰にもある普遍的ジレンマですね．

吉川：ただ問題なのは，式を使わずに非線形をやっていくと，単に「こういう解釈もできます」というだけになってしまう傾向があるんですよね．式を使って分岐とかを見て，こういう面白いことがあるのかと，その感動を味わってもらいたいですね．

蔵本：私も高校生に話すときは簡単な式も使うんですが，それでも難しいらしくて，なかなか大変です．

栗村：大学に入って初めて習った数学がとても概念的なもので，初めはなかなか興味が持てず，物理の授業で必要になって次第に身につけていったのですが，数学はどうしてもとっつきにくい印象があります．

蔵本：簡単な数学でも，本当はすごく沢山面白いことを記述できるんですよね．そういうことは，早い時期に教える価値が十分あると思います．

12. 興味のあること

栗村：話が変わりますが，学問的なことでもそれ以外でも，先生がいま興味をもっておられることは何でしょうか．

蔵本：何十年かリズム現象や結合振動子などの研究をしてきて，自分なりに作り上げてきたものをちゃんとした形で次世代に伝えられるように残しておきたいという気持ちがあります．集大成というと大げさなのですが，きちんと整理していきたい．その作業は，今現在ある程度はやっているところです．

研究面では，もはや若い研究者としのぎを削って第一線で頑張る年齢でもないので，もうちょっと広い意味で，非線形現象の科学やそれに関連した科学を，自然科学全体の中での位置づけとして，もっと考えを深めていきたいと思っています．それと，これも年のせいかもしれませんが，今現在の我々の世界のルーツとか歴史的なこと，たとえば，日本の近世の歴史とか，明治維新とか戦後史とか，どういう変成をたどって我々の現在があるのかということに興味がありますね．

吉川：そういう点では，蔵本さんは京都に住まわれておりますから，その探訪もできますね．

これからそういう面も含めて，大きく仕事を発展させていただいて，我々や若い人たちに刺激を与えてください．

長い時間，どうもありがとうございました．

栗村：ありがとうございました．

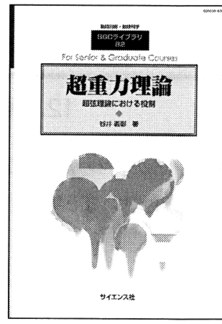
（2011 年 6 月，京都大学にて）

（くらもと・よしき，京都大学名誉教授）
（よしかわ・けんいち，京都大学大学院理学研究科）
（くりむら・とも，京都大学大学院理学研究科 M1）

超重力理論

超弦理論における役割

谷井義彰著，B5 判，192 頁，本体 2381 円，サイエンス社



本書は超重力理論の入門書である．超重力理論というと，なじみのない人はどのようなイメージを持つのだろうか．重力理論といえば多くの人はそれなりにイメージできるかも知れないが，そこに「超」という文字がつくと，何やら SF チックなすごい理論という印象を持つかも知れない．素粒子論の分野において，この「超」という文字は「超対称性」と呼ばれる対称性の存在を示す接頭辞である．副題にある「超弦理論」においても同じである．

様々な現象をできるだけ少数の法則を用いて表そうとする素粒子論において，対称性は最も重要な概念の一つである．平面図形を数値的に記述することを考えてみよう．円であればその半径を，正三角形では一片の長さを与えるだけでその形状は決まる．それに対して一般の三角形では 3 辺の長さを与える必要がある．このように，対称性の高い図形は少数のデータで表すことができる．素粒子論における対称性の役割もこれと似ている．理論が持つ対称性が大きければ大きいほど，その理論は少数のパラメータを用いて記述でき，統一理論としての資質を備えているということができる．

超対称性は，実験的にも，数理的興味の観点からも，現在最も注目されている対称性の一つであり，この世に存在する 2 種類の場，ボーズ場とフェルミ場を結びつける．ボーズ場には電磁場，重力場など，主に力を媒介する場が含まれる．一方フェルミ場には，電子の場をはじめとする物質場が含まれている．見掛けの全く異なるこれらの場を結びつける役割を果たすのが超対称性であり，特に重力を含む超対称理論を超重力理論と呼ぶ．

素粒子論の研究者にとっても超重力理論は「難しいもの」というイメージがある．その一つの理由は，考え方自体はシンプルなのであるが，それを実際に計算しようとすると，とたんに式が複雑になってしまうということが挙げられる．超対称性を扱うにはスピノルを扱う必要があり，それが数学的な扱いを複雑にしているからである．そしてもう一つ，様々な超重力理論をカバーした入門的な教科書がこれまでなかったということが挙げられる．このような中で出版された本書は，多くの研究者およびこれから学ぼうとする学生によって待望の一冊ということができよう．

本書の構成について簡単に述べておこう．まず第 1 章では超弦理論との関係について簡単に触れた後，超重力理論に登場する個々の場に対して簡単な説明がなされる．第 2 章では 4 次元の幾つかの超重力理論について述べた後，第 3 章において様々な時空次元において存在する超重力理論がまとめられている．それ以降の章では，それらの超重力理論が持つ特徴的な性質，例えば非コンパクトな群によって表される対称性の存在や次元還元を通した異なる次元の超重力理論の間の関係などが述べられている．

一口に超重力理論といっても様々な種類があり，しかもそれらすべてを統一的に扱う手法が存在しないため，それぞれの理論において個別の解析をすることが必要となる．従ってそのすべてを 200 ページ足らずの入門書で詳しく扱うということはそもそも無理であるから，必然的にその一部に的を絞って解説するということになる．一つの方法は，超重力理論の種類を特定してその理論について詳しく述べる，という方法であり，Wess–Bagger の有名な教科書はその一例である．もう一つの方法は，様々な次元と超対称性の個数を持つ理論について，網羅的に解説するという方法であろう．本書においてはこの後者の方法を取っている．近年の超弦理論の発展の中では，次元などが異なる様々な理論が登場するので，このような解説はとても有用である．

本書では，重力多重項のみの理論に限定している．また，理論の構成法などの詳細は省かれている．従って，現象論的な応用を目的としている読者には物足らないかもしれないが，副題に示されているように，本書はあくまでも超弦理論との関係に主眼を置いた解説であり，超弦理論に興味のある読者にとっては便利な一冊となるだろう．

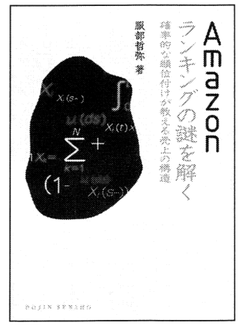
予備知識としては古典的な場の理論の基礎について学んでいることが仮定されており，修士課程の学生であれば，それほど難なく読み進むことができるだろう．

今村　洋介（東京工業大学大学院理工学研究科）

Amazon ランキングの謎を解く

確率的な順位付けが教える売上の構造

服部哲弥著，B6 判，224 頁，本体 1700 円，化学同人



書籍の巨大オンラインストア Amazon の各商品の紹介ページには，「Amazon ベストセラー商品ランキング」という数字が表示されている．このランキングはその商品が現在どれくらい売れているかを順位で示しているらしいのだが，それがどのように計算されているのかは公表されていない．この私自身，自分の著書が Amazon に登録されたとき，この順位が気になって，暇があればチェックしていたものだった．そして今思えば，私は漠然と特に根拠もなく，一定期間で売れた冊数を集計して多い順に並び変えたものがこのランキングだろうと思っていた．

しかし，それに対して，著者の主張はこうである．この順位は，「商品が売れる度にその商品を一位にしているだけである．（そして他の商品の順位は一つずつ下がる）」．私は著者が講演した慶應大学でのセミナーでこの主張を初めて聞いたとき，非常に驚いた．一つには，そこまで簡単なルールで計算されているわけがない，という思い込みがあった．そして，どんなに売れていない本でもたまに売れたときに一位になり，その後しばらく上位を占め続けてしまうならばランキングの意味をなさない，という反論がすぐに思い浮かんだからでもある．

しかし，特定の商品のランキングを毎時間追跡してみると（Amazon ランキングは一時間に一度更新される），商品が売れたときに順位が一気に急上昇し，そのあと急速にランクを下げ，その落下速度が緩やかになっていくのが分かる．このグラフを見ると，著者の仮説は自然であり，有効な順位付けになっていることが納得される．だが，この本を読んで知って驚いたことには，著者はこのグラフを見て上の仮説に辿りついたのではないらしい．

初期において著者はランキングを目視確認で記録しており，しかも多忙な大学教員であるからには当然だが，それほど頻繁にチェックしていなかった．著者は，このような膨大な数の商品と顧客に対してどのような順位付けのアルゴリズムが簡便で有効か，自分自身でゼロから発想してみる，という方法でこの仮説に到達し，モデルを立てることで理論的かつ実験的に仮説を検証した．これによって，公開されているランキングだけを観測することで，言わゆる「ロングテイル・ビジネス」が成立しているのか，など様々な興味深い情報が得られる．観測，仮説，検証という物理学的なアプローチによる Amazon のビジネスモデルの分析が，応用面から見たこの本の一つの面白さだろう．しかし，著者の企みの真の目的はそこではない．

一列に並んだものからランダムにピックアップして列の先頭に持って行く，というアルゴリズムは良く知られている．実際，色々な文脈で再発見され，研究されてきた．例えば，計算機科学の面からは「キャッシュ」の簡便な方法として知られ，実装も一般的である．しかし，これまでの研究はおおむね，十分に時間が経過して安定した形，つまり定常分布を求めるにとどまっていた．

一方，著者はこのアルゴリズムによる運動を確率過程として捉え，時間変化までモデル化してきちんと追いかけて行く．そして，あるスケーリングの下での粒子数（商品数）無限大の極限を調べることで，ミクロな粒子運動としての描像とマクロな連続的現象の描像の両面をつないでみせる．すなわち，専門的に言えば，確率過程の流体力学的極限の理論による研究である．実際，Amazon ランキングの問題は，流体力学的極限の理論の最も易しい，非自明な応用例であり，この事実の発見こそが最大のポイントなのである．

そして，この本の真の狙いは，その研究内容を一般読者にまで説明することである（もちろん，縦書きで）．正直に言って，それが成功しているとまでは言い難い．現代の確率過程論の基礎は，「ランダムな運動とは何か」ということに関する一種の悟りと，解析学の深い成果の結びつきでできており，これを正面から一般読者に説明するのは大変に難しいからだ．

しかし，著者のその志の高さが素晴しい．この著者でなければ，ここまでは書けなかっただろう．その意味では奇書であり，自然科学の人間社会への応用に興味を持つ方には強く，一読をお薦めしたい．数学の社会への応用の面白さ，難しさ，そして希望が感じとれることと思う．

原　啓　介（ACCESS Co., Ltd.）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

鈴木 増雄

1981年11月号

本誌のフラクタル[1]の特集は筆者には格別に意義深いものでありました．この特集が，その概念の提唱者マンデルブローの目にとまり，翌年彼がフランスのクールチェベルで主催した第1回フラクタルワークショップにそれまでこの特集にしかフラクタルのことを書いたことのない筆者が遠い日本からの招待講演を依頼されました．あわてて，その会議参加の前に，この特集の筆者のオリジナルな部分を英文にしてプログレス[2]に投稿したという思い出があります．



筆者が大学に入学して間もなく，高木貞治の『解析概論』を読んでいると，その本の最後の方に，至るところ微分不可能な曲線の話が出てきました．それは，後にマンデルブローが名づけたフラクタルの数学的な原型です．筆者は，それをあまりにも特殊な病的な例と受けとったという記憶があります．ところが，30年前，この特集の記事を書くに当って，マンデルブローの本[1]を丁寧に読み直し，「フラクタルの方が普遍的である」という彼の主張を知り，しびれてしまいました．彼の主張は，フラクタルの持つ自己相似性という特徴に着目すると，それは，今まで美しく規則的であると思っていた従来の対象の自然な拡張であるという見方です．実際，この特集で筆者がとりあげた「相転移とフラクタル」というテーマは，それまで筆者が研究してきた相転移点近傍の異常なゆらぎを特徴づける臨界指数が幾何学的に見るとフラクタル次元で表されるという主張に関するものです．

要するに，それまで各分野で現象ごとに個別に工夫されてきた指標がフラクタルという概念で統一的に扱えるようになったということです．マンデルブローはそれまでの常識を覆したわけです．今やそれは，カオス，相転移・臨界現象，乱流，河川などの地理的構造，血管などの生体構造，銀河団の分布に関する宇宙構造，$1/f$ ノイズなどに見られる時間的変動の特徴（東日本大震災などの前後の大小の地震の頻度など），および，指数演算子の高次分解[3]などを扱うのに必須の手段となっています．ただ注意すべきことは，実際の対象は，多くの場合「フラクタルもどき」であって，すべてのスケールで数学的意味での自己相似性が存在するわけではなく，「過渡的なフラクタル」[2]であることに留意して，この概念を使用すべきでしょう．

参考文献

1) B.B. Mandelbrot, *Fractals: Form, Chances and Dimension* (Freeman, San Francisco, 1977);「ニュートンからマンデルブローまで」(D. シュタウファー他著，朝倉書店，1993);「フラクタル科学」(高安秀樹編著，朝倉書店，1987).
2) M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **69** (1983) 65.
3) M. Suzuki, *Phys. Lett.* **A146** (1990) 319; *J. Math. Phys.* **32** (1991) 400.

（すずき・ますお，東京大学名誉教授）

情報幾何の新展開

脳と情報の数理科学

第10回

微分幾何学早わかり (2)

曲率，捩率と共変微分

甘 利 俊 一

微分幾何は，空間という概念の発展させて早くから定式化された数学である．そのため，現代の教科書は厳密な定義をもとに体系的に記述されていて，数学を専門とする者を除けば，これに取りつくことは容易ではない．例えば，多様体や接ベクトルといった比較的直観的に理解できる概念も，厳密に定義するとややこしい話になる．今回は曲率をめぐって話を直観的に始め，共変微分を定義し，接続をどう決めるかを考える．情報幾何の中心概念である双対アファイン接続は次回にゆずる．なお，もっと体系的に学びたい読者は，本稿で得た直観をもとに体系的な教科書に進むと良い．

10.1 曲率とベクトルの世界一周

空間は曲がっている．その曲がり方と捩れ方を表す曲率と捩率は，古典微分幾何の華である．ここで接続が使われるが，その意味が直感的にわかるように話を進めよう．空間に点 P (その座標を $\boldsymbol{\xi}$ とする)，およびここから少しだけ離れた 2 点 P_1, P_2 を考える．P_1 の座標を $\boldsymbol{\xi}+\underset{1}{d}\boldsymbol{\xi}$，$P_2$ の座標を $\boldsymbol{\xi}+\underset{2}{d}\boldsymbol{\xi}$ としよう．さらに，第 4 の点として，この微小変化を重ねて，座標が $\boldsymbol{\xi}+\underset{1}{d}\boldsymbol{\xi}+\underset{2}{d}\boldsymbol{\xi}$ である点 P_3 を考える．こうすると，微小な四辺形 $PP_1P_2P_3$ ができ上がる (図 10.1)．

いま，P 点での接空間のベクトル

$$\boldsymbol{A} = A^i \boldsymbol{e}_i \tag{10.1}$$

を取り上げ，これを点 P_1 および P_2 に平行に移動してみる．これには接続 Γ_{ij}^k が必要になる．

P_1 に移すと，成分も基底も少し変わるから，$\boldsymbol{A}_1 = \left(A^i + dA^i\right)(\boldsymbol{e}_i + d\boldsymbol{e}_i)$ になる．これが P 点での $\boldsymbol{A} = A^i \boldsymbol{e}_i$ に対応するとする．場所の変化による基底

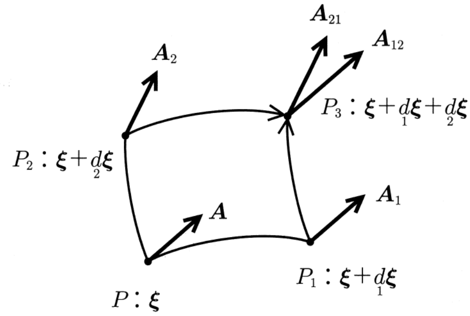


図 10.1　2 つのルートをたどった $\boldsymbol{A}$ の平行移動.

の変化

$$d\boldsymbol{e}_i = \Gamma_{ji}^{k} \underset{1}{d}\xi^j \boldsymbol{e}_k \tag{10.2}$$

を用い，2 次の微小項を無視すれば

$$dA^i = -\Gamma_{jk}^{i} A^k \underset{1}{d}\xi^j \tag{10.3}$$

ならば $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}_1$ とが対応していることが分かる．次に P_1 点でのベクトル $\boldsymbol{A}_1$ を P_3 点に平行にさらに移す．これを $\boldsymbol{A}_{12}$ とし，その成分を P_3 点での基底で表したら $\left(A^i + dA^i + \delta A^i\right)$ であるとする（図 10.1）．前と同様に (10.3) 式を用いて δA^i を求めるが，このときの Γ_{jk}^{i} は P_1 点でのものを使う．これより

$$\delta A^i = -\Gamma_{jk}^{i}\left(\boldsymbol{\xi} + \underset{1}{d}\boldsymbol{\xi}\right)\left(A^k + dA^k\right)\underset{2}{d}\xi^j \tag{10.4}$$

$$= -\Gamma_{jk}^{i}\underset{2}{d}\xi^j A^k - \partial_l \Gamma_{jk}^{i}\underset{1}{d}\xi^l \underset{2}{d}\xi^j A^k + \Gamma_{jk}^{i}\Gamma_{lm}^{k}\underset{2}{d}\xi^j \underset{1}{d}\xi^l A^m. \tag{10.5}$$

ここでは $\Gamma_{jk}^{i}\left(\boldsymbol{\xi} + \underset{1}{d}\boldsymbol{\xi}\right)$ をテイラー展開し，全体では 2 次の微小項まで計算した．

同じ計算を，$\boldsymbol{A}$ をまず P_2 に移して $\boldsymbol{A}_2$ とし，次にこれを P_3 に移して $\boldsymbol{A}_{21}$ としてみよう（図 10.1）．移す経路が違うから，$\boldsymbol{A}_{12}$ と $\boldsymbol{A}_{21}$ は同じとは限らない．経路として $\underset{1}{d}\boldsymbol{\xi}$ と $\underset{2}{d}\boldsymbol{\xi}$ のどちらを先に行くかで違う．両者の差を取れば，$\boldsymbol{A}_{12}$ と $\boldsymbol{A}_{21}$ がどう違ってくるかがわかる．これを $\delta\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_{12} - \boldsymbol{A}_{21}$ として，(10.5) 式から $\underset{1}{d}\boldsymbol{\xi}$ と $\underset{2}{d}\boldsymbol{\xi}$ とを入れ代えた式を引けばよい．まとめると，成分で書いて

$$\delta A^i = R_{jkl}{}^{i} A^l \left(\underset{1}{d}\xi^j \underset{2}{d}\xi^k - \underset{1}{d}\xi^k \underset{2}{d}\xi^j\right) \tag{10.6}$$

となる．ただし

$$R_{ijk}{}^{l} = \partial_i \Gamma_{jk}{}^{l} - \partial_j \Gamma_{ik}{}^{l} + \Gamma_{im}{}^{l}\Gamma_{jk}{}^{m} - \Gamma_{jm}{}^{l}\Gamma_{ik}{}^{m} \tag{10.7}$$

である．これが前回に述べた曲率テンソルであった．

これを，ベクトル $\boldsymbol{A}$ の世界一周の言葉で述べる．P 点のベクトル $\boldsymbol{A}$ をまず

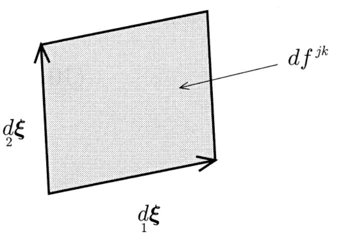


図 10.2　空間の面素テンソル．

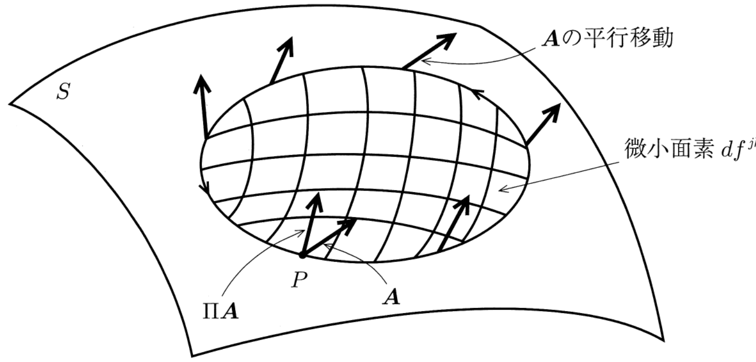


図 10.3　$\boldsymbol{A}$ の閉曲線に沿った世界一周．

P_1 点へ移し，ついで P_3 点に移す．さらに，これを P_2 点経由でもとの P 点に戻す（すなわち，P_3P_2P の経路で戻すから負になる）．このときの世界一周後の $\boldsymbol{A}$ の変化 $\delta\boldsymbol{A}$ が (10.6) 式で書ける．曲率が 0 ならば $\delta\boldsymbol{A}=0$ で，世界一周しても何も起こらない．これは平坦な空間の話である．ここで，$\underset{1}{d}\boldsymbol{\xi}$ と $\underset{2}{d}\boldsymbol{\xi}$ を 2 辺とする平行四辺形の面要素を

$$df^{jk}=\left(\underset{1}{d}\xi^j\,\underset{2}{d}\xi^k-\underset{1}{d}\xi^k\,\underset{2}{d}\xi^j\right) \tag{10.8}$$

とおく．df^{jk} は微小ベクトル $\underset{1}{d}\boldsymbol{\xi}$ と $\underset{2}{d}\boldsymbol{\xi}$ とで囲まれた四辺形を表すテンソルである（図 10.2）．すると

$$\delta A^i=R_{jkl}{}^iA^l df^{jk}. \tag{10.9}$$

ベクトル $\boldsymbol{A}=A^i\boldsymbol{e}_i$ が方向と大きさを持った量であるように，面素 $d\boldsymbol{f}=df^{jk}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k$ は面の方向と大きさを持つテンソル量である．これは 3 次元空間のベクトルの外積 $\underset{1}{d}\boldsymbol{\xi}\times\underset{2}{d}\boldsymbol{\xi}$ を一般化したものと考えてほしい．こうした 2 次元方向を表す面素テンソルは，反対称で

$$df^{ij}=-df^{ji} \tag{10.10}$$

を満たす．

いま，微小な四辺形に添って $\boldsymbol{A}$ の世界一周を考えた．では，P 点を出発する大きなループを考え，これに添ってベクトル $\boldsymbol{A}$ を世界一周させよう．一周のループに 2 次元の面を張る．各面の微小要素を df^{ij} で表すと，ループはこのような微小面素で張られる（図 10.3）．すると一周後の $\boldsymbol{A}$ の変化は成分で書いて

$$\Delta A^i=\int R_{jkl}{}^iA^l df^{jk} \tag{10.11}$$

のように面の上での積分で書ける．これは，面の張り方にはよらない（ストークスの定理の一般化で，面を小区間 df^{ij} に分ければ，小四辺形の線の積分が打消し合って結局ループの積分になる）．

10.2 捩率と世界一周

次は Einstein の導入した‘捩じれ’である．P 点とここから微小にずれた 2 点 P_1 と P_2 をふたたび取り上げる．まず，P と P_1 を結ぶ微小ベクトル

$$\underset{1}{d}\boldsymbol{\xi} = \underset{1}{d}\xi^i \boldsymbol{e}_i, \tag{10.12}$$

および P と P_2 を結ぶ微小ベクトル

$$\underset{2}{d}\boldsymbol{\xi} = \underset{2}{d}\xi^i \boldsymbol{e}_i \tag{10.13}$$

を考える．微小ベクトル $\underset{1}{d}\boldsymbol{\xi}$ を P 点から P_2 点へ平行に移してみよう．これを $\underset{1}{\widetilde{d\boldsymbol{\xi}}}$ と書くと，その成分は P_2 点では少し余分な項が加わって

$$\underset{1}{d}\tilde{\xi}^i = \underset{1}{d}\xi^i + \Gamma^i_{jk}\underset{2}{d}\xi^j \underset{1}{d}\xi^k \tag{10.14}$$

となる．今度は微小ベクトル $\underset{2}{d}\boldsymbol{\xi}$ を P 点から P_1 点へ平行に移す．すると

$$\underset{2}{d}\tilde{\xi}^i = \underset{2}{d}\xi^2 \Gamma^i_{jk}\underset{1}{d}\xi^j \underset{2}{d}\xi^k \tag{10.15}$$

である．ここで P_1 経由の移動 $\underset{1}{d}\boldsymbol{\xi} + \underset{2}{d}\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ と P_2 経由の移動 $\underset{2}{d}\boldsymbol{\xi} + \underset{1}{d}\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ を考えると，両者は一般に一致しない（図 10.4）．そのずれは両者の差を計算して

$$\Delta\xi^i = \left(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}\right) df^{jk} \tag{10.16}$$

のように書ける．このとき，ずれを表す

$$S_{jk}{}^i = \frac{1}{2}\left(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}\right) \tag{10.17}$$

を捩率テンソルという（これはテンソルになる）．$S_{jk}{}^i$ が 0 でないときは，この四辺形は捩じれていて，平行移動で場所が合う平行四辺形にはなっていない（図 10.4）．

世界一周の観点で言えば，まず，P 点から出発して P_1 へ行き，ついで，$d\boldsymbol{\xi}_2$ をここに移したほうへ移動する．ここからは前に来た $\underset{1}{d}\boldsymbol{\xi}$ と平行に逆に戻る（すなわち $-\underset{1}{d}\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ だけ進むが，これは $-\underset{1}{d}\boldsymbol{\xi}$ を平行移動したものである）．さらに P_2

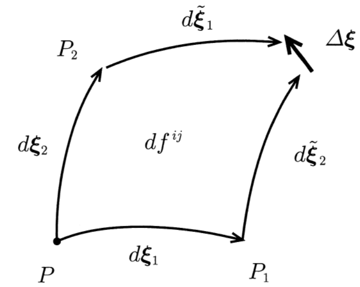


図 10.4　捩率：平行移動による位置のずれ．

から $-\underset{2}{d}\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ だけ戻るが，これは行きの $\underset{2}{d}\boldsymbol{\xi}$ を平行移動したものの逆である．こうすると，出発点の P には戻らず，

$$\Delta\xi^i = S_{jk}{}^i df^{jk} \tag{10.18}$$

だけずれる．微小といわず大きなループで世界一周したときには，いつのまにか

$$\Delta\xi^i = \int S_{jk}{}^i df^{jk} \tag{10.19}$$

だけ位置がずれる．このずれが捩率である．

情報幾何のこの解説では捩率は扱わず，接続は対称

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \tag{10.20}$$

であるとする．しかし，情報幾何に捩率を入れようという試みもある．捩率は実は Einstein が，重力と電磁場を含めて統一した空間の理論，統一場理論を模索する中で導入した．電磁場は 4 次元で書くと反対称テンソルになる．だからうまくいくのではないかと考えた．面白いことにある程度までうまくいく．もう少しである．でも駄目だった．

しかし，工学の世界では捩率は有効に使われている．一つは，回転電気機械の話で，ハンガリー出身の GE の技術者 G. Kron が導入した電磁力学微分幾何理論である，電気機械の非ホロノームな接続をもとに力学を構成する話であるが，これは捩率を持つ力学として構成できる．非ホロノーム力学はロボットの制御で復活した．もう一つは，結晶などの格子の乱れで，転位（ディスロケーション）の分布を捩率とし，弾塑性論を構築する話である．どちらも微分幾何を用いる理論として面白い．Landau と Lifshitz も連続体力学としてこれを試みたが，彼等の話は中途半端で，もっと本格的な理論ができる．しかし，本稿では割愛しよう．

10.3 共変微分

いよいよ共変微分である．曲がった空間の上で関数の微分やベクトル場の微分を考えてみよう．空間の各点で値が定まる関数 $f(\boldsymbol{\xi})$ が与えられたとしよう．すなわち多様体 M から実数への写像

$$f : M \to \boldsymbol{R} \tag{10.21}$$

である．場所が変われば関数の値がどう変わるか，f を微分すればその変化率がわかる．これは偏微分でよい．方向微分を見るために，各点でベクトルが与えられるベクトル場を考える．ベクトル場 $\boldsymbol{X}$ とは，空間の各点 $\boldsymbol{\xi}$ でベクトル

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\xi}) = X^i(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{\xi}) \tag{10.22}$$

が定義されている，空間のベクトル値関数のことである．すなわち T を各点での接空間として

$$\boldsymbol{X} : M \to T. \tag{10.23}$$

例を挙げれば，空間 M が流体で満たされているとき，各点での流れは速度ベクトル場で表せる．流れに沿って関数 $f(\boldsymbol{\xi})$ の値がどう変わっていくか，その変化を見るのが方向微分である．ベクトル場 $\boldsymbol{X}$ があれば，関数 f がこのベクトル方向にどう変化するかを，方向微分

$$\boldsymbol{X}f = X^i(\boldsymbol{\xi})\partial_i f(\boldsymbol{\xi}) \tag{10.24}$$

で知ることができる．(10.22) 式の $\boldsymbol{e}_i$ が偏微分 ∂_i に代わって f に作用したと見る．こう見ると，ベクトル場とは，スカラー関数 f に対してその方向微分を与える線形演算子で，2 つの関数 f, h に対してライプニッツ則

$$\boldsymbol{X}(fh) = (\boldsymbol{X}f)h + h(\boldsymbol{X}f) \tag{10.25}$$

を満たすものということもできる．

この解釈では，基底ベクトル場 $\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{\xi})$ は，座標軸方向 ξ^i に添った偏微分，

$$\boldsymbol{e}_i = \partial_i \tag{10.26}$$

である．このため，基底 $\boldsymbol{e}_i$ の代わりに ∂_i を使ってよい．接空間のベクトル $\boldsymbol{e}_i$ を，その方向への微分演算子 $\partial_i = \partial/\partial\xi^i$ と同一視する．偏微分とは座標軸方向への微分である．

スカラー関数 f がどう変わっていくかは偏微分または方向微分でわかる．では，ベクトル場が場所によってどう変わっていくかを見るにも，同じように方向微分すればよいだろうか．それには少し事情が違って，成分 $X^i(\boldsymbol{\xi})$ を偏微分すればよいというわけにはいかない．なぜなら，$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\xi}) = X^i(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{\xi})$ と $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\xi}+d\boldsymbol{\xi}) = X^i(\boldsymbol{\xi}+d\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{\xi}+d\boldsymbol{\xi})$ とでは，成分だけでなく基底も違うからである．$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\xi})$ と $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\xi}+d\boldsymbol{\xi})$ の違いを見るには，$T_{\boldsymbol{\xi}+d\boldsymbol{\xi}}$ のベクトル $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\xi}+d\boldsymbol{\xi})$ を $T_{\boldsymbol{\xi}}$ に平行に移して，違いを見なければならない．$\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{\xi}+d\boldsymbol{\xi}) \in T_{\boldsymbol{\xi}+d\boldsymbol{\xi}}$ を $T_{\boldsymbol{\xi}}$ に移したものは

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_i(\boldsymbol{\xi}+d\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{\xi}) + \Gamma_{ji}^k \boldsymbol{e}_k d\xi^j \tag{10.27}$$

であるから，$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\xi})$ の ξ^i 軸方向の沿った微分（$\boldsymbol{e}_i$ 方向への微分）は

$$\nabla_i X^k = \partial_i X^k + \Gamma_{ij}{}^k X^j \tag{10.28}$$

と書ける．これを $\boldsymbol{e}_i$ 方向への共変微分と言い，記号 ∇_i で表す．ベクトル場 $\boldsymbol{X}$ の，ベクトル場 $\boldsymbol{Y}$ 方向に沿った共変微分は

$$\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{X} = Y^i\left(\partial_i X^k + \Gamma_{ij}{}^k X^j\right)\boldsymbol{e}_k \tag{10.29}$$

と書ける．曲がった空間で微分するのもなかなか大変である．

基底ベクトル場 $\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{\xi})$ も一つのベクトル場である．基底ベクトル場 $\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{\xi})$ 自体が，点 $\boldsymbol{\xi}$ が ξ^j 方向に動くとき，実質的にどう変化するかは共変微分 $\nabla_{\boldsymbol{e}_j}\boldsymbol{e}_i$

で書ける．これを計算すれば，

$$\nabla_{\boldsymbol{e}_j}\boldsymbol{e}_i = \Gamma_{ji}{}^{k}\boldsymbol{e}_k \tag{10.30}$$

となる．内積を使えば

$$\left\langle \nabla_{\boldsymbol{e}_j}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k \right\rangle = \Gamma_{jik} \tag{10.31}$$

である．これは接続の係数を表すわかりやすい式である．

共変微分は，ベクトル場だけでなくテンソル場の微分にも使える．テンソル場の共変微分はテンソル場である．実は，曲率と捩率を，共変微分を使って書くことができる．いま，3 つのベクトル場 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$ があったとしよう．このとき，2 つのベクトル場の交代積を

$$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] = \boldsymbol{XY} - \boldsymbol{YX} = \left(X^j\partial_j Y^i - Y^j\partial_j X^i\right)\boldsymbol{e}_i \tag{10.32}$$

で定義し，これを使って $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ が与えられたときに，ベクトル場 $\boldsymbol{Z}$ を新しいベクトル場

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z} = \nabla_{\boldsymbol{X}}\left(\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Z}\right) - \nabla_{\boldsymbol{Y}}\left(\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Z}\right) - \nabla_{[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]}\boldsymbol{Z} \tag{10.33}$$

に写す線形演算子 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ を定義できる．これが曲率テンソルである．偏微分ならば

$$\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i \tag{10.34}$$

であるが，共変微分では

$$\nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i = 0 \tag{10.35}$$

は成立しない．空間が曲がっているからである．これは，$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{X}$ を計算すれば，曲率テンソルを使って

$$\left(\nabla_{\boldsymbol{e}_i}\nabla_{\boldsymbol{e}_j} - \nabla_{\boldsymbol{e}_j}\nabla_{\boldsymbol{e}_i}\right)\boldsymbol{X} = R_{ijk}{}^{l}X^k\boldsymbol{e}_l \tag{10.36}$$

となる．

同じように，捩率テンソルについて

$$\nabla_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{e}_j - \nabla_{\boldsymbol{e}_j}\boldsymbol{e}_i = S_{ij}{}^{k}\boldsymbol{e}_k \tag{10.37}$$

が成立する．式 (10.33) または (10.36) と (10.37) を，曲率テンソルと捩率テンソルの定義とするのが微分幾何の教科書である．格好は良いが，この定義から意味を理解するのは容易でない．

曲率も捩率も 0 となる空間を平坦な空間と言う．このとき，1 点の接空間で，一組の基底ベクトル $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ を考える．これを他のすべての点に平行に移動しても，曲率がないので平行移動は経路によらない．だからどの点でも同じ $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ を基底として用いることができる．

いま，座標系 $\boldsymbol{\theta}$ として，座標軸 θ^i の接線がいつもこの $\boldsymbol{e}_i$ であるものを取

る．これは測地線である．すなわち平坦な空間では測地線からなる座標系を取ることができて，その自然基底が $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ になっている．これを，曲率が 0 の空間のアファイン座標系という．アファイン座標系をアファイン変換したものもアファイン座標系である．このとき，ベクトル場 $\boldsymbol{e}_i$ は変化しないから

$$\nabla_{\boldsymbol{e}_j}\boldsymbol{e}_i = 0, \tag{10.38}$$

これより (10.31) から

$$\Gamma_{jik} = 0 \tag{10.39}$$

が言える．

10.4 リーマン接続

アファイン接続を定めれば，曲率などの多様体の構造はわかる．でも肝心のアファイン接続 ${\Gamma_{ij}}^k(\boldsymbol{\xi})$ をどう定めるのだろうか．数学は自由だからどう定義してもよいとはいうものの，それではあまりに素っ気ない．確率分布族の空間の場合は，あとで述べる不変性を満たすように定義する．すると，構造が一意に定まる．不変なダイバージェンスから導くこともできる．

まず，リーマン計量 $g_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = \langle \boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{e}_j(\boldsymbol{\xi})\rangle$ が定義された空間，リーマン空間を考え，ここで接続をどう定めるかを考えよう．リーマン空間では，2 点 P と Q とを曲線 $\boldsymbol{\xi}(t)$,

$$\boldsymbol{\xi}(0) = P, \quad \boldsymbol{\xi}(1) = Q \tag{10.40}$$

でつないだときに，この曲線に沿って微小距離の 2 乗

$$ds^2 = g_{ij}(\boldsymbol{\xi})d\xi^i d\xi^j \tag{10.41}$$

を考える（図 10.5）．ds を積分した

$$s = \int_0^1 \sqrt{g_{ij}\left\{\boldsymbol{\xi}(t)\right\}\dot{\xi}^i(t)\dot{\xi}^j(t)}dt \tag{10.42}$$

がこの曲線の長さである．$\dot{\boldsymbol{\xi}}$ は $(d/dt)\boldsymbol{\xi}(t)$ である．この距離を最小にするような曲線が，2 点 P と Q を結ぶ測地線になるように，接続を定めるのが一つの考えである．式 (10.42) で曲線に沿って変分をとり，Euler–Lagrange の変分式を計算すると，ここから測地線の方程式が出る．これを計算すれば，Γ_{ijk} が g_{jk} を用いてどう表せるかがわかる．腕に自信のある人は試みよ．答はすぐ後に述べる (10.46) 式である．

もう一つの考えは，ベクトルの平行移動と長さの関係である．P 点でベクトル $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(P)$ を考え，これを曲線に沿って Q 点に平行移動する．すると Q 点では

$$\boldsymbol{A}(Q) = \prod\nolimits_{\boldsymbol{\xi}(t)} \boldsymbol{A}(P) \tag{10.43}$$

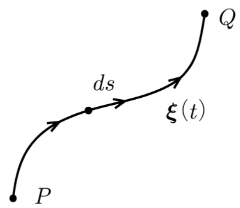


図10.5　曲線に沿った長さの積分.

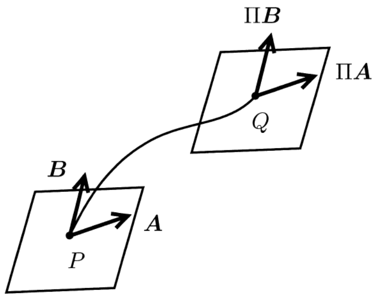


図10.6　平行移動による内積の保存.

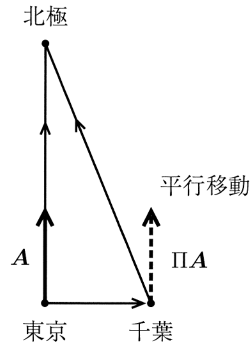


図10.7　東京から北を向くベクトルを千葉に平行移動する.

となる．平行移動は，ベクトルの長さを変えないという要請は，リーマン的な長さと平行移動とを調和させる自然なものである．すなわち，

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}\rangle_P = \left\langle \prod \boldsymbol{A}, \prod \boldsymbol{A}\right\rangle_Q \tag{10.44}$$

を要請する．もっと一般に

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\rangle_P = \left\langle \prod \boldsymbol{A}, \prod \boldsymbol{B}\right\rangle_Q \tag{10.45}$$

でよい（図10.6）．

この両者から出る考えは一致し，捩率がないとき接続の係数は下の2つの添え字に関して対称である，$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}$ という条件の下で，

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\right) = [i, j; k] \tag{10.46}$$

が得られる．ここで，記号 $[i, j; k]$ を Christoffel 記号と呼ぶ．この条件を満たす接続を Levi–Civita 接続，またはリーマン接続と呼ぶ．この導出は教科書に載っているが，読者自ら確かめてみるのもよい演習問題である．多様体 M にリーマン計量 g_{ij} が与えられ，そこから接続を決めたものをリーマン空間と言い，$\{M, g\}$ のように書く．

リーマン接続の下では，計量テンソルの共変微分は0である．

$$\nabla_i g_{jk} = 0. \tag{10.47}$$

つまり，$g_{ij}(\boldsymbol{\xi})$ は点 $\boldsymbol{\xi}$ に依存するが，これは空間が曲がっているか座標系が曲がっているせいで場所毎に違って見えるので，リーマン接続の平行移動で考えれば実質的には同じものになる．このとき，2つのベクトル場 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ の内積をベクトル場 $\boldsymbol{Z}$ 方向に微分したものは

$$\boldsymbol{Z}\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\rangle = \langle \nabla_{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\rangle + \langle \boldsymbol{X}, \nabla_{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{Y}\rangle \tag{10.48}$$

のように書ける．$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$ としてそれぞれ基底ベクトル場 $\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k$ をとれば，

$$\partial_i g_{jk} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{ikj} \tag{10.49}$$

が成立する．ここから (10.46) 式を出すこともできる．

リーマン空間は $\{M, g\}$ はリーマン接続を備えて美しい構造を持っている．

終わりの一言

微分幾何は曲がった空間を扱う幾何学である．曲がった空間の簡単な例は，ユークリッド空間の曲面である．例えば，地球の表面である．曲がると何が起こるのだろう．曲がっている度合いは曲率で計れる．とはいえ，東京で，表面の凸凹はならしたとしても，地球の裏面の曲率を測ることは容易ではない．曲率は世界一周すると明らかになる．いま，東京で北を向いているベクトルを考えよう．このベクトルを東に平行に移す．東に 30 km，千葉に移したとして，このベクトルは北を向くだろうか．東京，千葉，北極を結ぶ三角形を考えれば，北極と東京を結ぶ線と，北極と千葉を結ぶ線は平行ではなくて角度を持っている (図 10.7)．だから，東京から真北を向くベクトルを千葉に移せば，真北よりはほんの少し東を向く．これを続けて，東へ東へと世界を一周してまた東京へ戻れば，このベクトルは真北とはほど遠く北東を向いたものになる．これが曲率である．

読者は言うかもしれない．それは定義による，平行移動の定義をするのに，地球の緯度線，経度線はいつも平行であるとすれば良いではないか．こうすれば真北はいつも真北，東はいつも東で気持ちがよい．その通りである．この定義は，遠隔平行性を保つ．しかし，リーマン接続 (Levi–Civita 接続) ではこうはならない．だから世界一周で曲率が出る．遠隔平行性を入れるには，零率テンソルが必要である．このとき，捩率のせいで，世界一周でもとの場所へ戻れない．やはり地球は曲がっている．このあたりの仕組みは，格子欠陥 (dislocation) を含んだ物質の幾何学理論で効果を発揮するのだが，これは他の話である．次回に，我々はこれとは違った，双対の接続を導入し，空間構造を豊富にする．これが情報幾何である．

（あまり・しゅんいち，理化学研究所脳科学総合研究センター）

数学的感覚

砂田 利一

1. マッハの感覚要素

主題とは一見無関係に思われる話から始めよう．

マッハ*1) によれば，我々が「実在」すると信じているこの世界は「もの」からできているのではなく，色，音，圧，時間，空間などの「感覚要素」から成立している．この意味で，「もの」を扱う物理学も，「こころ」を扱う心理学も，同じ学問ということになる．さらに，この観点を推し進めれば，感覚を司る器官を持つ人間がいなければ，月もなければ机も存在しないことになる．このような極端には走らなくても，マッハがボルツマンの理論を批判したように，原子や分子のような直接的な感覚の領域に入らないような物理的対象の実在に疑いを持つことはあり得る．しかし，アインシュタインのブラウン運動の理論の実験的検証（ペラン，1909 年）や，X 線回析による結晶構造の発見（フォン・ラウエ，1912 年）は，アトミズム*2)が単なる思弁的な「絵空事」ではないことを証明した．

さらに，次のような奇妙なストーリーは，感覚要素のみが世界を構成するという説に対する原始的反論となるだろう．

ウォレス*3) という，「種」の起源に関する理論ではダーウィンと比肩されるべき人物がいる．博物学者，動物地理学の創始者，アマゾンやマレー諸島の探検家，そして（空想的）社会主義の活動家としてのウォレスの波乱万丈の人生は，それだけでに興味津津なものである[3]．このウォレスが「平らな地球事件」という，世にも不可解な事件に巻き込まれたのは 1870 年のことである．この「事件」は，「平らな地球」誌の編集長であるジョン・ハムデンの「地球は丸いことを証明せよ」という挑戦状を，ウォレスが真っ向から受けたことに端を発する．

もし，素朴な観察を行えば（すなわち直接的感覚に訴えるならば），我々の立つ地表は「平ら」に見えて，それはどこまでも続いているように思われる．ハムデンは，この観察から地球は平らであると結論し，彼に取っての自明な結論に反する説を受け入れることを拒否したのである．

測量士の経験も持つウォレスは，イギリスのノーフォーク州にあるオールド・ベッドフォード運河を使い，直線状の運河に沿って杭を順に打つことにより測量を行うことにより，地表が曲がっていることを証明した．しかし，両者の立会人の下で

*1) Ernst Mach; 1838–1916. オーストリア出身の科学哲学者．
*2) 古代ギリシャのレウキッポス，デモクリトス，エピクロスらの原子論に源を持つ仮説，主義，理論をいう．
*3) Alfred Russel Wallace; 1823–1913.

の測量にも関わらず，ハムデンはそれを認めることを拒否し，さらにはウォレスの個人攻撃を始めるに至ったのである．真正直で温和な性格のウォレスも，この個人攻撃には腹を立て，訴訟に踏み切った．そして勝訴したにも関わらず，ハムデンの攻撃は手を変え品を変え続くことになる．別の訴訟で罰金と謝罪広告の掲載を勝ち取った後も，ハムデンによる名誉毀損はさらに続き，ウォレスは 20 年間ハムデンに悩まされ続けることになってしまったのである．

ハムデンが 1888 年に結成した「国際平らな地球協会」は，現在でも活動を続けている！ 人間の活動が狭い地域に限られていた大昔ならいざ知らず，現在では人工衛星から写した写真を見て容易に見て取れる丸い地球を，未だに「たぶらかし」として認めない人々がいるのは驚きである．恐らく，この話の教訓は「パラノイアに陥った人間を相手にするな」ということになると思う（文献 2) も参照）．しかし，パラノイアの集団が大きくなり，さらに「政治」と結びつくとき，「相手にしない」という手段では済まなくなることもある．

ウォレスが大きな貢献をした「種」の起源の問題も，パラノイア的宗教家（原理主義者）によって多大の被害を受けている．「創造科学」あるいは「インテリジェント・デザイン」というのを，読者はご存知だろうか．創造科学は聖書の天地創造やノアの物語を字句通り受け取り，すべての生物は，神が創造したときから変わることはなかったと主張する科学である．インテリジェント・デザインは，近代科学の諸説を受け入れつつも，「創造者」を「偉大なる知性」と読み替えただけの似非科学である．アメリカでは，進化論を教えるのなら，インテリジェント・デザインも同時に教えなければならないとキリスト教の「原理主義者」が主張して，一部の政治家と結びつき，裁判沙汰までになった．

ますます，本論説の主題から逸れてしまった．感覚の問題に戻ることにしよう．

感覚というものを狭く解釈し，それを以って知ることのできる世界を真の世界とするならば，ハムデンの説や天動説が登場することを妨げることはできない．マッハの反アトミズムもそうである．しかし，マッハの説が無意味というつもりはさらさらない．実際，マッハの考え方はアインシュタインの相対性理論に繋がるし，感覚要素説はそれなりの説得力を持っている．すなわち，ハムデンや原理主義者の荒唐無稽な説とは一線を画する．しかし，感覚を司る器官を人間内部の器官に限定するのはあまりに素朴すぎるのではないだろうか．人間の外部に「補助器官」を備えることにより，人間の感覚の限界を超えた感覚を獲得し，それをもって世界を理解することができる．そう考えるのが自然に思う．

補助器官の発達とともに，人間の感覚能力自身も進化する．1 万年前の人類の感覚能力と，現代人の感覚能力には大きな差がある．古代には見えていなかったものが見えてくる．数学は，この感覚能力の進化の中で，特に大きな飛躍を遂げた学問である．

2. 直観

マッハの哲学には，否定的な形であったにせよカント主義の影響があったといわれる．ここでは，このカント主義に簡単に触れることにする．

18 世紀の哲学者イマニエル・カント*4) は，一生をケーニヒスベルグという東プロシャ（現在はロシア領）の小さい町で過ごしながら，人間，世界そして宇宙について形而上学的考察を深めた．「カント以前の哲学は，すべてカントに流れ込み，カント以後の哲学は，すべてカントから流れ出た」と言われるほど，人類の精神文化におけるカントの影響は絶大なものである．

英国の経験主義者ヒューム*5) は，すべての知識は経験に基づき，中でも印象がもっとも直接的な経験であること，高度な観念，知識，法則は，この印象から連想によって生ずると考えた．すると，自然科学の諸成果（たとえば，ニュートンの力学理論）も，結局はこの連想の習慣による「主観的」な信念に過ぎないことになる．すると，客観的と

*4) Immanuel Kant; 1724–1804.
*5) David Hume; 1711–1776.

信じられている自然科学的知見は，砂上の楼閣に過ぎないと言わざるを得なくなる．ましてや，なんら経験的なものを含まない形而上学は，あやふやな学問として否定の憂き目をみることになるだろう．

ヒュームの思想に衝撃を受けたカントは，形而上学を根本から建て直すため，まず，自然科学のよって立つところを批判検討することから始める．

空間（正確には全空間とその部分としての空間）とは何か．それは，我々人間から独立したものとして存在するのか．カントは，そうではないという．空間は，我々の経験を通して，「作り上げる」ものである．しかし，その「作り出す」途上では，我々の側にあるア・プリオリ（先天的）な判断形式を用いている．したがって，経験という主観的な経過は経ていても，同時に客観的なのである．

ア・プリオリな判断形式とは何か．それは，決して生まれながらにもつ能力ということではない．経験的な素材から，「理性に基づき，経験からは独立に」判断する根本的な形式なのである．このような形式によって得られた対象が，客観的かつ必然的な知識（真理）をもつことは明らかであろう．全空間が3次元をもつという命題は，3つ以上の直線が1点において互いに垂直には交わり得ないという命題の帰結である．しかし，我々の住む全空間が4次元ではなくて，なぜ3次元でなくてはならないのかについては，数学的には誰も答えることはできない．カントによれば，それはまさに我々人間の経験を通してア・プリオリな判断形式により得られる，空間に関する「真理」なのである．

このような観点からは，我々の目の前にある空間の直観的呪縛から逃れられないことになる．言い換えれば，空間への直観から導き出されたユークリッド幾何学の公準を前提とするような空間（ユークリッド空間）は「絶対的」な対象であり，それとは異なる空間には考えも及ばないことになる．しかし，幾何学がカントの呪縛を乗り越え，19世紀に大きく飛躍したことは，直観的判断形式の理論が及ばないテリトリーに我々の「感覚」が進化したことを物語っている．

3. 数学的感覚

数学に対する一般の人々の印象は，深遠で難解ということで共通しているようである．このような印象は，好意的な立場から見れば，未知の世界に対する憧れということになるが，場合によっては数学を根っから毛嫌いする方向にも向かわせる．確かに数学書は，それがたとえ一般読者を対象とした啓発書であっても，決して容易には読み進められるものではない．物理学や化学，生物学などの，「現実にあるもの」を扱う分野の啓発書と違って，「精神の中にあるもの」を追求する数学は，読者にあたかも虚空を彷徨う思い生じさせることがあるからだ．確かに，数学の研究の現場には，ビーカーもなければ顕微鏡もない．コンピュータも（人によるが）必需品ではない．このせいもあって，数学の扱う対象に現実感を見出すためには，読者の努力が大いに期待されるのである．中でも躓きの石となるのは，現代数学を支えている様々な「抽象的概念」である．たとえば，空間の「向き」とか「群」，「アフィン空間」などの抽象的概念が登場すると，読者はその場で踏み惑うことになる．また，数学で使われる用語には，奇妙な名前のついたものがある．たとえば，現代数学に登場する「位相」，「環」，「体」，「層」，「圏」などは，まさにその例である．数学者にはお馴染みのこれらの概念も，初めて聞く者は，一体なぜこのような名前がついているのか訝しく思うのではないだろうか．後者については，英語による表現では，それぞれ topology, ring, field, sheaf, category であるが，こう表しても奇妙さは減じない．現代数学を学ぼうとするとき，これらの名前に漂う衒学的匂いに惑わされ，入り口で躊躇する者も多いという．

しかし，一見余人には近づきがたいように見える高度な数学的概念の多くが，実は日常的に使われる言葉遣いや，我々の身の回りに存在する事柄から派生しているしているのである．たとえば，空間の「向き」は「右手と左手」を抽象化した概念であるし，「形の対称性」や「ものの入れ換え」から「群」の概念が生まれ，この世界の「平坦性」

の直観的理解から「アフィン空間」の概念が登場した．と言うことは，たとえ時間がかかるとしても，一般の人々をして決して到達不可能な位置に，抽象的概念が存在しているわけではないことを意味する．

さらに数学の研究でも，言葉と文字を用いて想念や理念を表現するということでは，日常的な言語活動と全く同じである．ボルヘス*6)の描くトレーンの世界のような，地球外の文化が作り出したとしか思えない異様な言語を駆使する世界に，数学者が住んでいるわけではない（『伝奇集』，鼓直訳，岩波書店，1993 年）．

しかし，数学，あるいはもっと一般の科学における言語の機能は，それ以外の言語のそれとは大きな違いがある．その違いとは何だろうか．

一つの言葉には，それに付随する「意味」が与えられている．しかも，その「意味」全体のなす領域は，（球体が球面を境界とするようには）明確な境界をもっているわけではない．言うまでもなく，このこと，すなわち言葉の意味が固定されず，多義的に開いている事実が，人間の精神文化の豊かさを保証する土壌である．たとえば，もし詩や小説に使われる語の意味が予め狭く指定されているとしたら，いくら形と発音の美しい語を連ねても何の感興も引き起こさないに違いない．ここに一つの例がある．

自分が来て宇宙になんの益があったか？
また行けばとて格別変化があったか？
いったい何のためにこうして来り去るのか，
この耳に説きあかしてくれた人があったか？
オマル・ハイヤーム『ルバイヤート』（小川亮作 訳）

これは，ハイヤームの詩である．この詩に現れる「宇宙」，「変化」，「人」などの言葉に本来の意味しか割り当てられないとしたら，ハイヤームの意図するもの（比喩）は全く失われるだろう．11 世紀，ペルシャの天文学者，数学者，歴史学者であったハイヤームは，イスラム教とは相いれない彼の哲学（唯物論的自然観）を 4 行詩（ルバイヤート）に託したが，特にこの詩は，宇宙にとって人間が何を意味するかを問うことによって，彼の無常観を的確に伝えている．

一方，科学では，たとえ複数の意味をもつ言葉も，その意味の及ぶ範囲を閉じさせなければ，理論を語る言語として用をなさない．一人の科学者が使っている言葉が，その適用範囲を越えた形で別の科学者により用いられるとしたら，バベルの塔で起きたことが科学にも起こり，科学は完全に無力化するだろう．とくに，数学において使われる用語がそうである．日常的な概念から数学概念の形成に向かう道筋は，雑多な意味が絡み付く一つの言葉から，純粋かつ本質的なものを取り出す過程にほかならないのである．

さらに言えば，数学では，感覚による物事の把握に付きまとう曖昧さを排するための手段として，徹底的な「抽象化」が行われる．それは，情緒性を無視した冷酷とも言える概念純化の過程である．上でも述べたように，数学を学ぶものの躓きの石は，このようなところにもある．しかし，抽象化の道筋を深く味わうことにより，この冷酷さが一種の清涼感に変わり，数学の美しさに魅了されることは，数学を「楽しむ」者が多く経験するところである．

4.「概念」はどこにあるのか

数学的概念とは何だろうか．それは，数学者の心に描かれる想念であり，しかも「確かにそこにあるもの」と固く信じる「数学的実在」である．このように言うと，抽象的で分かりづらいかもしれない．例を挙げれば，「数」や「空間の点」がそのようなものである．こんなものは，数学者でなくてもすぐに思い浮かべることができるし，「実在」などと大袈裟なことを言わなくても，「ある」ことを認めるというかもしれない．しかし，よく考えてみれば，それは小学校以来の数学の訓練の賜物と言える．なぜなら，「数」も「空間の点」も，読者の心の中に作り上げる（プラトンの意味の）イ

*6) Jorge Francisco Isidoro Luis Borges Acevedo; 1899–1986. アルゼンチン出身の作家，詩人.

デアだからである．世界のどこに，数や点がころがっているだろうか．だれも現実に見たものはいない．それでも，これらが存在すると思うのは，脳が一種の塑性変形を起こし，「理念」が「実在」に転化したからである．

前節に挙げた「位相」，「環」，「体」，「層」，「圏」などの概念もイデアである．そして，数学者は，このようなイデアも「実在」として感じる訓練を受けている．実際，長い間，一つの概念を「ああでもない，こうでもない」と扱っていると，たとえそれが計算と論理の中で動いているとしても，世界のどこかに固定されたものとして「現実感」が漂い始める．それを触っている感じさえ生じるのである．だから，数学者には「24次元空間」や「無限」も「見える」し，素数を「点」にも「感じる」ことができるようになる．もっと言えば，「実在感」なしには，数学などできはしない（この意味で，数学者はプラトン主義者とも言える）．

脳学者の養老孟司氏は，「数学は頭の中の規則，すなわち神経系がおのずから持つ規則にほかならない」と書いている[1)]．全くその通りだと思う．しかし，すべての「実在」がやはり脳の活動を通して「確信」されるのだから，概念の「実在感」も決して異様なことではない．空間の点を「実在」と感じることのできる段階から，現代数学の諸概念を「実在」と思う段階に至る過程は，決して不連続なものではないのである．と言うことは，訓練さえすれば，すべての人が，現代数学を理解できる可能性をもっていることを意味する．

中島敦の小説『名人伝』には，弓矢の名人になろうと欲した男が，辛く長い修行に耐えることにより，ノミが馬の大きさに見え，馬が山の如くそそり立つように感じになるというようなことが書いてある．数学者もこの男のようなものかもしれない．数学的概念を肌で感じるには，一種の修行が必要なのだ（しかし小説の中では，皮肉なことに，人生を賭けた修行の果てに男は不射の射の極意に達し，最後には弓の使い方をも忘れるという「落ち」で終わる）．ここまで書いて思い出したのだが，この話は，言語ゲームで有名な哲学者ヴィトゲンシュタイン[*7)]のケースを彷彿とさせる．実際，彼は工学者として飛行機のエンジンの設計を目指し，そのためにプロペラの研究を始めて，さらに設計のために必要な数学的素養を深め，ついには数学の基礎に移っていった．そしてラッセルと共同で論理学の研究を始め，真理関数などの概念を生み出したが，それにも満足できずに，哲学の世界に入っていったのである．そして最後には，「私は（ゲームの）規則に盲目的に従う」と言うように，言語ゲームの世界に到達した．

*7) Ludwig Josef Johann Wittgenstein; 1889–1951．オーストリア・ウィーン出身の哲学者．

閑話休題

いずれにしても，数学者が「概念」を実在と思う過程は，人間の周りに広がる「世界」の認識が，時代が進むと共に拡大すると共に深くなる過程に似ている．ある時点まで，見えていなかったものが見えてくる過程は，脳のどこかで変化が起こったと考えられるからだ．

数学的感覚能力は，これからも進化していくだろう．しかし，この先，どのような進化が待ち受けているのか，それを予測することは困難である．

参考文献

1) 養老孟司，『唯脳論』，青土社，1989年．
2) M. ガードナー（市場泰男訳）『奇妙な論理 I, II』，教養文庫，社会思想社，1989年，1992年．
3) アーノルド C. ブラックマン（羽田節子・新妻昭夫訳），『ダーウィンに消された男』，朝日選書，朝日新聞社，1997年．
4) 砂田利一，『現代幾何学への道—ユークリッドの蒔いた種—』，岩波書店，2010年．

（すなだ・としかず，明治大学理工学部）

リレー連載

人物で学ぶ数学

創始者の思考で学ぶ

第7回

S.S.チャーン

チャーンと東北大学理学部数学教室

劔持　勝衛

1. はじめに

S.S. チャーン（陳省身）（図 1）は E. カルタン（1869–1951）と共に 20 世紀を代表する幾何学者である．1944 年に発表したガウス・ボンネの定理の別証明[2] で一躍有名になり，それからの活躍はめざましく微分幾何学における世界のリーダーであった．

チャーンの業績や人柄は小林昭七によって「現代幾何学の流れ　チャーン」，数学セミナー，2003 年 4 月号，や「チャーン（陳省身）先生を偲んで」，数学通信，10 巻 3 号 (2005) で紹介されている．



図 1　左：S.S. チャーン，右：宮岡礼子（東北大学大学院理学研究科教授），2001 年 9 月，上海にて．筆者撮影．

これらの記事には殆ど書かれてないが，実はチャーンと東北大学理学部数学教室*1) は深く関係していて，多くの資料が残されている．そこで本稿では，チャーンが仙台を訪問したとき詠んだ詩文を紹介しながら，どのような繋がりから私はチャーンの論文や講義録を読み，そして数学者の道を歩むことになったのか説明しよう．

2. チャーンと佐々木重夫

チャーンは 1911 年 10 月 26 日中国浙江省で生まれ，15 歳のとき天津の南開大学入学，その後北京の清華大学大学院を経て，ドイツのハンブルク大学で W. ブラシュケの下で博士号を得た．その後は，パリの E. カルタンのところで研鑽を積み，1943 年アメリカへ移り，プリンストン高等研究所，シカゴ大学教授，カリフォルニア大学バークレイ校教授，バークレイ数学研究所初代所長として活躍した．

チャーンはドイツへ出発する前に既に 3 編の論文を持っていたが，そのうちの 2 編[1] が東北大学理学部数学教室より発行されている欧文の研究発表雑誌 *The Tohoku Mathematical Journal*（東北数学雑誌）から出版されている．この 2 編がチャー

*1)　平成以後では東北大学大学院理学研究科数学専攻が正式名称であるが，戦前の帝国大学時代は学科を教室と呼んでいた．

ンにとっては初めて外国の雑誌に掲載された論文であった．「東北数学雑誌」の編集長から掲載許可の手紙を受け取ったときは非常に嬉しかったと後日チャーンが述べている．

実際,「東北数学雑誌」は欧文の数学専門誌としては日本で最初に発刊された雑誌（1911年創刊）である．チャーンの論文が掲載された第40巻の全35人の執筆者のうち27人は外国人でJ. Hadamard, J. Sz. Nagy, Su Buchin等の有名な数学者が寄稿している．

私の恩師である佐々木重夫はチャーンより1年若く1912年11月18日山形県で生れている．東北帝国大学理学部数学教室で窪田忠彦の下で微分幾何学を専攻し，1944年東北帝国大学助教授，1946年東北大学教授となりどこにも転出することなく1976年3月定年退職した．

チャーンと佐々木との間の友情は,佐々木が1952年プリンストン高等研究所に招聘され2年間過ごして帰国するとき，チャーンによってシカゴ大学に2カ月間招待されたことに始まる．

3. チャーンの講義録

1965年6月チャーンは文部省の招聘で初めて来日し，佐々木の世話の下で東北大学に滞在した．当時，私は東北大学理学部の4年生で佐々木が教授を務める第3講座に属していた．第3講座の講師になったばかりの丹野周吉の指導で，ゼミではチャーンの微分可能多様体についての講義録*2)を読んだ．私は丹野により数学書の読み方の基本を教わった．年齢が近いこともあって兄のような存在であった．

ゼミのテキストの著者が数学教室主催の談話会で講演するというので，顔だけでも見たいと思って出席した．そのときの様子を当時一関高等専門学校に勤務していた酒井隆が覚えていた：談話会では2つの講演があり，一つはH.C. Wangによるリー群関係の講演でチャーンは関数論における値分布論の微分幾何的取り扱いについて講演した．講演終了後に代数的整数論で有名であった淡中忠郎が「今日は幾何の話だと思ったら代数と解析の話でしたね」と感想を漏らしたので，チャーンがすかさず“Geometry covers all over the mathematics.”（幾何学は数学全体をカバーする）と答えて会場が沸いた．

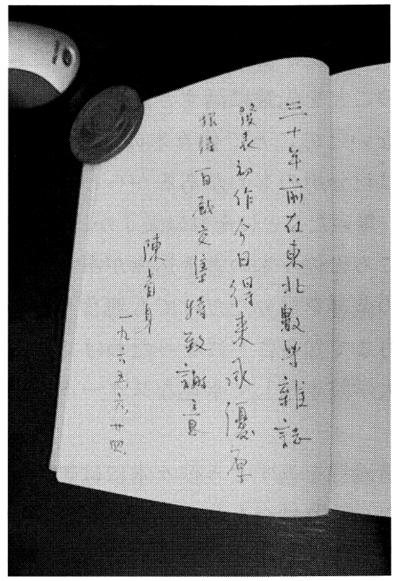


図2　チャーンのサイン，1965年6月，東北大学理学部数学教室談話会サイン帳より．

数学教室には招待講演者用のサイン帳がある．図2はチャーンのサインで内容は次のようである．

三十年前，在東北数学雑誌
發表初作．今日得来，承優厚
招待，百感交集，特致謝意！
陳省身　1965.6.24

和訳：三十年前，東北数学雑誌に初作を発表させて頂きました．今日，ここを訪れ手厚くもてなして頂きまして，気持ちがいっぱいです．心から感謝致します．

陳省身，1965年6月24日　(侯中華訳)

私は1966年4月東北大学大学院に入学し，佐々木の複素多様体についての講義を聞いた．講義初日に佐々木は数冊の参考書を板書したが，その中に

*2) 第1ページにDIFFERENTIABLE MANIFOLDS Shiing-Shen Chern Special Notes, Mathemaics 243, Winter Quarter 1959 Department of Mathematics, University of Chicagoとタイプされている．

チャーンの講義録*3)があった．早速，数学教室の図書室へ行ったが借用中で見ることができなかった．このことを先輩に話すと，講座図書にあるかもしれないとのことで佐々木の研究室を訪ねた．佐々木は自分用のものがあるからといって貸してくれた．驚いたことにそれは装丁がぼろぼろで，いたるところに佐々木の書き込みがあった．尊敬する先生の蔵書を借りただけでも興奮したのに，勉強の仕方まで知ることになったわけで，第3講座所属の大学院生として幸運なスタートを切ったと思った．

この講義録を返すとき佐々木には無断でコピーを取った．それは今も私の手元にあり宝物の一つであるが，佐々木の亡くなる前に謝ることを忘れてしまった．

4. チャーンの論文

次の年もチャーンと関係することがあった．1967年2月，私の修士論文のテーマを決めるとき，佐々木はいくつかの論文をあげたが，その中に部分多様体の全絶対曲率に関するチャーンとラショフの共著論文[3]があった．

私の修士論文は全絶対曲率に関する総合報告で新しい結果は出せなかったけれども，運よく助手になることができた．当時は講座制でその講座の人事は教授一人で決めることができ，さらに日本各地で理工系大学が誕生していたので，数学教員の需要が多かったためである．

1968年4月東北大学理学部助手となり，仕事としては理学部3年の佐々木担当の講義に付属する演習を手伝うことだけだった．

この年の6月，佐々木の研究室で「論文を書きなさい．まずはこれを読んでみたら」といわれたのが複素空間形内のアインスタイン複素超曲面についての論文[7]であった．そして対応する問題を正規接触リーマン多様体*4)で考えよというのが佐々木の提案であった．

この問題に関して私は数編の論文を書き，「東北数学雑誌」から出版させてもらった．しかし周囲の評判はかんばしくなく，このテーマで博士号をとるのは難しいと思った．

1970年の秋，佐々木は赤い表紙でA4判の本を私に示し，「チャーン先生から送られてきたが，君にあげる」といわれた．それはチャーンがカンサス大学で行った極小部分多様体に関する講義録*5)であった．

私は既に28歳になっており，結婚し長男も生まれていたが，数学者として一人だちできるにはこの本を読むしかないと覚悟を決めた．

この講義録には1960年代に発表され大きな注目をあびた極小曲面に関するオッサーマンの定理，高次元球面内の極小部分多様体に関するサイモンズの不等式等が動標溝理論を用いて簡明に証明されていた．私は非常な興味を覚えてこの講義録を読んだ．

次に，チャーンの定曲率空間内の極小球面に関する論文[4]を詳しく読んだ．そして，チャーンの研究を局所化することに成功し，応用として平坦トーラスから高次元球面への極小はめ込みを発見した．これらの成果により，1975年東北大学から理学博士号を受けた．

5. チャーンの仙台訪問

チャーンの2回目の東北大学訪問は1974年8月，チャーン63歳のときで奥様同伴であった．佐々木夫妻の手厚い世話でチャーン夫妻は仙台滞在を十分に満喫した．実際，チャーンは佐々木重夫選集*6)で「2人はほぼ同時期に生まれ，そして，勉強した書物，幾何学に対する考えも同じであった」と述べ，次の詩を詠んだ：

*3) 第1ページに COMPLEX MANIFOLDS Lectures by S.S. Chern, The University of Chicago, Autum 1955–Winter 1956 とタイプされている．

*4) 現在では Sasakian manifold（佐々木多様体）と呼ばれている．

*5) “Minimal submanifolds in a Riemannian manifold” by S.S. Chern, University of Kansas, Department of Mathematics, Technical report **19** (New Series), 1968.

*6) “Shigeo Sasaki Selected Papers”, edited by S. Tachibana, Kinokuniya Company Ltd, Tokyo, 1985.

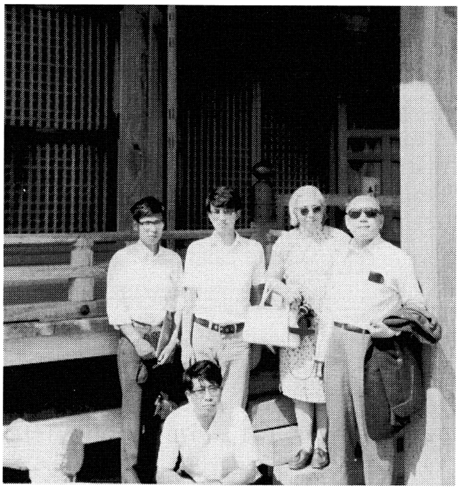


図３　後列左から丹野修吉，西川青季，チャーン夫妻，前列　高木斉，1974 年夏，松島・五大堂にて，筆者撮影．

牛刀小試呈初篇
垂老方知学問難
四十一年読旧作
荷花時節傳新知
同文同志尋真理
一心一徳探精微
莫道疇人天地小
喜看後学継前賢
1974，8　　陳省身

和訳：
包丁の出来を試すように初論文を書いた．
老けるにつれて学ぶことの難しさがわかった．
41 年前に書いた私の論文を読み返している．
はすが咲いており新知識を広める時期である．
共通の言語と意思の下で真理を求めよう．
知力と心を合体して究極の原理を求めよう．
数学者の考える世界が小さいなんて，誰が言えるだろうか？
我々の楽しみは後に従う若い優秀な人材を見ることにある．　(H. Wang の英訳から筆者訳)

仙台滞在中の一日，丹野がチャーン夫妻を松島に案内するというので同僚の高木，西川と一緒に参加した (図 3)．

私にとっては長時間外国人と行動を共にする初めての機会であったので緊張していてまた英会話もよくできず，何が話されたかよく覚えてない．聞きたい人である丹野は鬼籍に入ってしまった．享年 62 歳であった．

次にチャーンが日本を訪問したのは 1977 年でその年９月に東京で「極小部分多様体に関する日米セミナー」が開かれたときである．この研究集会の日本側責任者は東京工業大学の大槻富之助，アメリカ側はチャーンであった．

幸いにも私はこの研究集会の講演者の一人に選ばれたが，そのことは後の私にとって大きな意味をもった．実際，この会議に参加した外国人数学者の多くと現在でも研究交流が続いている．

私の講演では，極小曲面に関するワイヤストラス・エンネパーの表現公式を任意の曲面に拡張した式[5)]を発表したが，この研究は佐々木があるとき「やさしい問題も，難しい問題もそれを解決する時間はあまりかわらない」と述べたことから始まっている．

博士号を得て，次の研究テーマを探しているとき，上述の佐々木の言葉を思い出した私は良く知られている定理の別証明をしてみようと思った．取り上げた定理は極小曲面論において重要な役割を果たすワイヤストラス・エンネパーの表現公式である．「極小である」という条件を使わずに計算を続けた結果，最終的に極小曲面とは限らない任意の曲面に対する表現公式[5)]を発見した．この研究を「日米セミナー」で発表したのである．

6. 献呈論文

私はチャーンの学生であったことはないが，チャーンへの献呈論文[6)]をもっている．どのような事情でチャーンへ論文を献呈することになったか説明しよう．

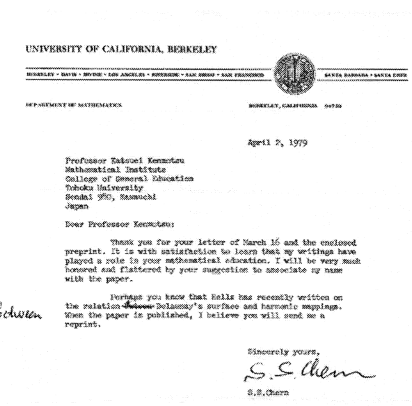
それは私のケルン滞在に起因する．1978 年４月，アレキサンダー・フォン・フンボルト財団の研究奨学金を得て，ドイツ・ケルン大学のドンブロウスキーの下にいたとき，レクチーゲルと知り合いになった．

1978年秋，レクチーゲルはケルン大学のコンピューターセンターで種々の平面曲線を描画していた*7)．彼は私に「平均曲率がゼロである回転面の生成曲線は懸垂線で，これは容易に描ける．では平均曲率がゼロでない一定のときの回転面の生成曲線はどのような形をしているだろうか？」と質問した．そこで，私は平均曲率一定な回転面を決定したデローネーの論文を紹介した．数日後，レクチーゲルが私に，「デローネーの発見した式はコンピューターには不向きである」というのである．「デローネーの式の中には広義積分が含まれているので，コンピューターによる計算はなかなか収束してくれない，従って，曲線の描画もうまくできない」といった．

この話を聞いたとき，私は直感的にデローネーの式がよくないのだと思った．その理由は，デローネーは同じ論文の中で，生成曲線の幾何学的構成法も示してあり，それによると生成曲線は特異点を持たないのである．私はデローネーとは別な計算方法があると信じて研究し，より簡単な式を見つけることができた．もっと重要なことは，私の計算方法では平均曲率一定という条件は必要ないので，結局任意の連続関数に対しそれを平均曲率にもつ回転面を表す式が得られた．

この式を使ってレクチーゲルと私はケルン大学の大型コンピューターで曲線の図を描いた．当時ケルン大学のコンピューターセンターは夜間に図を描画していた．それで私とレクチーゲルは午前中にコンピューターに入力する命令書をパンチし，ドンブロウスキーと一緒に3人で大学食堂で昼食を取り，その帰りにコンピューターセンターによって，前日依頼しておいた図面を受け取った．どんな曲線の形状になるかは誰も知らなかったので，その図面を眺めるのは3人にとって楽しい時間であった．

私のデローネーの定理の別証明はコンピューターグラフィクスからの問題提起とチャーンの論文や講義録を読んで別証明の重要性を知っていたことから始まっている．それで私はこの論文をチャーンへ献呈したいと考え，献呈論文を受け取ってもらえるかどうかの手紙チャーン宛に書いた．そしてチャーンからの承諾の返事（図4）が届いたとき，私は非常に嬉しかった．


UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY

DEPARTMENT OF MATHEMATICS　　BERKELEY, CALIFORNIA 94720

April 2, 1979

Professor Katsuei Kenmotsu
Mathematical Institute
College of General Education
Tohoku University
Sendai 980, Kawauchi
Japan

Dear Professor Kenmotsu:

Thank you for your letter of March 16 and the enclosed preprint. It is with satisfaction to learn that my writings have played a role in your mathematical education. I will be very much honored and flattered by your suggestion to associate my name with the paper.

Perhaps you know that Kells has recently written on the relation ~~between~~ between Delaunay's surface and harmonic mappings. When the paper is published, I believe you will send me a reprint.

Sincerely yours,

S. S. Chern

S.S.Chern

図4　チャーンの手紙，1979年4月2日付け．

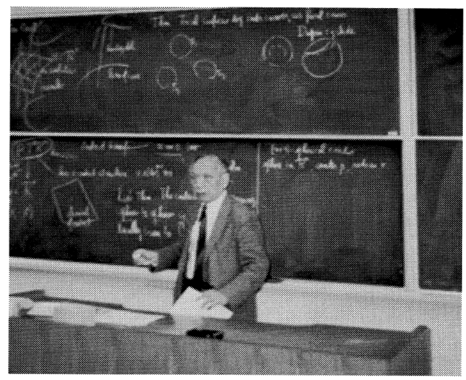


図5　チャーンの講演，1987年10月，仙台にて．東北大学理学部数学教室シンポジウム記録アルバムより．

7. チャーン最後の仙台滞在

その後，チャーンは1987年10月，76歳のとき3度目の仙台訪問をしている．東北大学大学院理学研究科数学専攻が企画した微分幾何学シンポジウムの招待講演者（図5）の一人であったし，またチャーンは旧友の佐々木に会えることを楽しみにしていたに違いない．しかし，佐々木はこの年の8月に急逝（享年74歳）していて会えなかった

*7）1978年頃はパーソナルコンピューターは出現していなかった．実際，初代マック（Macintosh 128K）が世に出たのは1984年1月である．

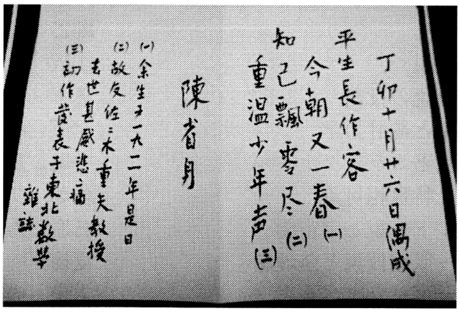


図6 チャーン直筆の漢詩，1987年10月26日，仙台にて．東北大学理学部数学教室シンポジウム記録アルバムより．

のである．このときの心境を詠んだチャーンの漢詩（図6）が残されている：

丁卯年十月弐六日偶成
平生長作客
今朝又一春　(一)
知己飄零尽　(二)
重温少年声　(三)
陳省身
(一)　余生干1911年是日
(二)　故友佐々木重夫教授去世甚感悲痛
(三)　初作発表干東北数学雑誌

和訳：
1987年10月26日 たまたまでき上がった
私の一生は常に旅人で，
今朝さらにひとつ歳をとった．　(一)
我が友は既に他界しており，　(二)
若いときの思い出が
目の前にうかんできた．　(三)
陳省身
(一)　私は1911年10月26日生まれである．
(二)　旧友であった佐々木重夫教授が逝去され，悲しみでいっぱいである．
(三)　私が初めて書いた論文は東北数学雑誌より出版された．　(侯中華訳)

チャーンと最後に会ったのは，2001年9月中国上海の復旦大学でスー・ブーチン（蘇歩青）100歳記念シンポジウムであった．チャーンは私を覚えていて，写真を撮りたいというと承知してわざわざ身を乗り出してカメラに収まってくれた．それが冒頭に示した一枚（図1）である．

その後2004年12月3日にチャーンは中国天津で亡くなった．享年93歳であった．

8. 終わりに

学部3年生のときに聞いた佐々木の講義に感銘を受け，私は幾何学を勉強することにした．そして佐々木，佐々木の下で助教授であった丹野（後に東京工業大学教授）の指導によりチャーンを知り数学者の道を歩むことができた．

私はチャーンの論文や講義録を読んで別証明の重要性を知った．優れた別証明はそれまでの数学の枠組みを替え，新しい世界を創出する．また，簡単な別証明は多くの読者を獲得し，そこから思わぬ方向に研究が進展することを知った．

本稿を記すにあたり酒井隆（岡山大学名誉教授），西川青季（東北大学大学院教授），候中華（中国・大連理工大学教授）の諸氏に大変お世話になった．

参考文献

1) S.S. Chern, “Triads of Rectilinear Congruences with Genarators in Correspondence”, “Associate Quadratic Complexes of a Rectilinear Congruence”, *Tohoku Math. Journal*, **40** (1935).
2) S.S. Chern, “A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds”, *Annals of Mathematics*, **45** (1944).
3) S.S. Chern and R.K. Lashof, “On the total curvature of immersed manifolds”, *American Journal of Mathematics*, **79** (1957).
4) S.S. Chern, “On the minimal immersions of the two-sphere in a space of constant curvature”, “Problems in Analysis”, Princeton Univ. Press (1970).
5) K. Kenmotsu, “Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature”, *Mathematische Annalen*, **245** (1979).
6) K. kenmotsu, “Surfaces of revolution with prescribed mean curvature”, *Tohoku Mathematical Journal*, **(2) 32** (1980).
7) B. Smyth, “Differential geometry of complex hypersurfaces”, *Annals of Mathematics*, **85** (1967).

（けんもつ・かつえい，東北大学名誉教授）

特　集（2011年12月号予告）

物理と仮説

論理的考察を進めるために

本体952円

特　集（2011年10月号）

時空と熱力学

ブラックホール熱力学の多彩な広がり

本体952円

編集後記

今回の特集はいかがでしたでしょうか．

数学や物理で習う微分方程式は大抵が線形のもので，これだけを扱えれば，物事は簡単だなと思います．ところが，そんなに単純ではなく，大抵の自然現象は非線形なもので，その解析にはとても苦労します．しかしながら，非線形なものを解析するときは線形なものを解析するときに培った知識や考え方が重要になってくると思います．

ところで，先日，約十年ぶりくらいに自転車に乗って，しかも何十キロという距離を走行しました．普段体を動かさないので，大変に疲れましたが，運動していた頃のことを思い出して，今の体の状態に合うようなうまい使い方を考えながら，ペダルを漕いでいました．少々無理矢理な気もしますが，最初に経験したことが重要になってくる例かもしれません．

もう少し多めに体を動かして，健康に留意したいものです．（R）

数　理　科　学　11月号

2011年11月1日発行

数理科学編集部　　発行人　木下敏孝

TEL. (03) 5474–8816

FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp

ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 © 株式会社 サイエンス社　TEL. (03) 5474–8500（代表）

〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁